



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Meccanica classica e quantistica di sistemi singolari

Relatore

Prof. Stefano Giusto

Laureando

Giovanni Ferrari

Anno Accademico 2017/2018

Sommario

Nella presente tesi è sviluppata la teoria generale dei sistemi singolari classici, con particolare attenzione alle teorie di gauge. Il problema dell'implementazione quantistica dei vincoli nella procedura di quantizzazione canonica è preso in considerazione attraverso alcuni esempi e con approcci differenti. La trattazione è estesa a teorie di campo, e in particolare all'Elettromagnetismo massivo.

Indice

Introduzione	v
1 Sistemi singolari classici	1
1.1 Trattazione lagrangiana per sistemi finito-dimensionali	1
1.1.1 Caratteristiche generali	1
1.1.2 Singolarità della funzione Lagrangiana	2
1.1.3 Esempi lagrangiani di sistemi singolari	2
1.2 Trattazione hamiltoniana per sistemi finito-dimensionali	5
1.2.1 Caratteristiche generali	5
1.2.2 Singolarità della trasformata di Legendre	6
1.2.3 Algoritmo di consistenza	7
1.2.4 Funzioni di prima e seconda classe	8
1.2.5 Esempi hamiltoniani di sistemi singolari	8
1.3 Teorie di campo classiche	11
1.3.1 Caratteristiche generali	11
1.3.2 Elettrodinamica massiva classica	13
2 Teorie di gauge classiche	15
2.1 Trasformazioni di gauge nel formalismo hamiltoniano	15
2.1.1 Hamiltoniana totale	15
2.1.2 Trasformazioni di gauge	16
2.1.3 Parentesi di Dirac	17
2.1.4 Gauge-fixing	18
2.1.5 Conversione dei vincoli	19
2.2 Simmetria BRST	20
2.2.1 Caratteristiche generali	20
2.2.2 Simmetria BRST e simmetrie di gauge	21
2.3 Esempi	23
2.3.1 La particella libera	23
2.3.2 Il rotore come teoria di gauge	25
2.3.3 Elettrodinamica massiva classica	28
3 Quantizzazione di sistemi singolari	33
3.1 Idee generali	33
3.1.1 Quantizzazione canonica	33
3.1.2 Quantizzazione di Dirac di sistemi singolari	34
3.1.3 Quantizzazione con le parentesi di Dirac	35
3.1.4 Quantizzazione BRST	35
3.2 Applicazioni	37
3.2.1 La particella libera	37
3.2.2 Il rotore	38
Conclusione	43

A	Hamiltoniana estesa e Congettura di Dirac	45
B	Teoremi di Nöther per sistemi di gauge	47
	Bibliografia	49

Introduzione

Ad oggi, le più importanti teorie fisiche sono *teorie di gauge*, nelle quali il numero di variabili matematiche introdotte per la descrizione del sistema è superiore agli effettivi gradi di libertà fisici. Tale sovrabbondanza si manifesta con la presenza di simmetrie locali (*trasformazioni di gauge* appunto) dell'azione. Ovviamente la possibilità di effettuare trasformazioni arbitrarie dipendenti dal tempo è sintomo del fatto che non tutta la dinamica sia significativa da un punto di vista fisico, e che le soluzioni delle equazioni del moto contengano un certo numero di funzioni arbitrarie non costanti. In particolare, solo le quantità che risultano invarianti sotto questo tipo di trasformazioni ammettono un'interpretazione fisica diretta e sono dette per questo *osservabili*. La dinamica di queste funzioni sarà, in ultima analisi, l'oggetto di studio di queste teorie.

Nella trattazione di sistemi che presentano simmetrie di gauge si dovrà dunque risolvere anche il problema di estrarre i gradi di libertà fisici dall'intero set di variabili utilizzate. Tipicamente, è più efficace mantenere intatta la natura simmetrica del problema per tutta la sua trattazione; l'ipotesi più intuitiva che sia conveniente ridursi ad un sistema con un numero minore di gradi di libertà prima di intraprenderne lo studio si rivela nella maggior parte dei casi fallace poiché tale procedimento risulta tecnicamente inaffrontabile, o addirittura non globalmente realizzabile a causa di ostruzioni topologiche, o fa perdere al modello altre buone qualità, come l'invarianza manifesta sotto ulteriori simmetrie.

Al contrario, può risultare più conveniente allargare ulteriormente il set di variabili introdotto per guadagnare un'ulteriore simmetria, detta *simmetria BRST* [3] (da Becchi, Rouet, Stora e Tyutin), collegata in qualche modo alla preesistente simmetria di gauge. Il formalismo introdotto per l'implementazione di questa nuova simmetria trova la sua più naturale espressione nel contesto delle *teorie di gauge non abeliane*, per le quali storicamente è stato sviluppato, ma può essere studiato e utilizzato con successo anche in modelli decisamente più semplici.

Tale approccio si rivela particolarmente utile quando si tratta il problema di quantizzare una teoria di gauge. Nella presente tesi verrà considerata la procedura di quantizzazione canonica nel formalismo hamiltoniano, ma naturalmente non si tratta dell'unico contesto in cui la costruzione presentata possa essere inserita, pur con notevoli differenze tecniche. Il problema della quantizzazione in presenza di gradi di libertà ridondanti, come ci si può aspettare, non è affatto recente ed è stato trattato per la prima volta da Dirac in un suo famoso lavoro [4]. Da allora, molti sforzi sono stati spesi sull'argomento, che ovviamente riveste un ruolo chiave nella ricerca teorica in fisica. La *quantizzazione BRST* è ad oggi uno dei metodi di più vasto impiego e di maggior successo.

Da un punto di vista formale, la trattazione hamiltoniana delle teorie di gauge ne mostra fin dall'inizio la natura di sistemi vincolati, ovvero nei quali la dinamica deve soddisfare condizioni che possono essere imposte come equazioni vincolari nello spazio delle fasi. Le teorie di gauge rientrano dunque nella più vasta classe dei sistemi singolari, all'interno della quale rivestono un ruolo di spicco per importanza fisica. Fondamentale è allora la classificazione dei diversi tipi di vincoli, in base alla quale tali teorie sono distinte dalle altre. Per queste ragioni, sarà prima di tutto sviluppata la teoria generale dei sistemi singolari, all'interno della quale possono essere fatti ricadere anche i più familiari sistemi meccanici sottoposti a vincoli olonomi indipendenti dal tempo.

Va infine precisato fin da subito che non è scopo della tesi una discussione esaustiva e matematicamente rigorosa del formalismo BRST. L'argomento, vasto e ricco di sottigliezze sia tecniche che concettuali, richiederebbe infatti un intero testo dedicato (come ad esempio [6]). Si preferisce di seguito sviluppare le idee generali della costruzione, omettendo le dimostrazioni e applicando invece il metodo a qualche esempio facilmente trattabile.

Presentato il problema in generale e fornite alcune motivazioni per il suo studio, si può procedere ora a una breve esposizione del contenuto della presente tesi, in base a come è stato organizzato.

Nel primo capitolo è presentata la teoria generale dei sistemi singolari, ovvero quei sistemi nei quali la trasformazione di Legendre è una mappa singolare dallo spazio delle coordinate lagrangiane (q, \dot{q}) a un più piccolo sottospazio dello spazio delle fasi hamiltoniano, descritto dalle variabili coniugate (q, p) . Per chiarezza di esposizione, sono considerati prima i sistemi finito-dimensionali, nei quali i passaggi matematici risultano più trasparenti. La teoria è poi estesa nell'ultima sezione del capitolo alle teorie di campo singolari, senza particolare riguardo alle sottigliezze matematiche che potrebbero sorgere durante un'analisi più rigorosa. Per rendere più comprensibile la trattazione, alla fine di ogni sezione sono stati raccolti alcuni esempi in cui i concetti appena introdotti vengono applicati. In particolare, si è scelto di studiare la particella libera relativistica, in quanto rappresenta il più semplice esempio possibile di teoria di gauge; la particella non relativistica vincolata a una sfera, per mostrare come il formalismo sviluppato sia applicabile in contesti completamente differenti; infine l'elettrodinamica libera (sia massless che massiva), per mostrare come alcune tecniche introdotte nei casi precedenti si estendano in modo naturale alle teorie di campo, in cui sono presenti infiniti gradi di libertà fisici.

Nel secondo capitolo, l'attenzione è stata concentrata sulle teorie di gauge, ovvero quelle in cui l'imposizione dei vincoli comporta la comparsa di una certa indeterminazione nella dinamica complessiva del sistema. In particolare è stato studiato un metodo generale per distinguere una teoria di gauge all'interno dell'ambito più ampio delle teorie singolari. Sono stati mostrati anche due metodi (in un certo senso antagonisti) per trasformare una teoria di gauge in una teoria senza arbitrarietà nella dinamica e viceversa. Tali metodi sono stati poi applicati agli stessi esempi già discussi nel capitolo precedente, ritrovando la dinamica classica attesa.

Nel terzo e ultimo capitolo, è stato preso in considerazione il problema della quantizzazione delle teorie singolari, vero scopo di tutta la costruzione teorica oggetto della presente tesi. Sono stati brevemente presentati i principali metodi disponibili, le loro caratteristiche e i loro limiti di applicabilità. Si è quindi passati alla quantizzazione di alcuni dei sistemi già considerati a livello classico nei capitoli precedenti. In particolare, per la particella vincolata è stato mostrato esplicitamente come due metodi diversi portino a due spettri distinti dell'operatore Hamiltoniano. Uno dei due risultati è stato poi scartato a favore dell'altro a causa della presenza di una costante additiva inaspettata negli autovalori dell'energia. Tale shift nei livelli energetici è stato interpretato come l'effetto di un potenziale efficace dovuto alla curvatura della superficie di vincolo immersa nel più ampio spazio delle fasi. L'effetto della curvatura sulla fisica del sistema è, in questo contesto, da considerarsi inaccettabile in quanto nell'ambito dei sistemi singolari le dimensioni esterne alla superficie di vincolo sono da intendersi come puri artifici matematici. Lo spettro fisicamente corretto è stato poi ritrovato modificando la Lagrangiana del sistema in modo da ottenere una teoria di gauge, con dinamica identica a quella del sistema di partenza (a meno di trasformazioni di gauge). La quantizzazione delle teorie di campo è stata invece omessa, in quanto richiederebbe strumenti che esulano dai requisiti richiesti per la comprensione della tesi.

Nelle appendici, infine, sono stati discussi argomenti che erano stati lasciati in qualche modo in sospeso nel corso della tesi, ma che non risultavano indispensabili per la comprensione dei concetti principali: il confronto fra due diversi modi per definire le trasformazioni di gauge e il legame fra le simmetrie locali e la teoria di Nöther.

Capitolo 1

Sistemi singolari classici

1.1 Trattazione lagrangiana per sistemi finito-dimensionali

1.1.1 Caratteristiche generali

Un sistema fisico finito-dimensionale è descritto dalla Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ se le equazioni del moto delle sue coordinate $q^n(t)$ (con $n = 1, \dots, N$ e N finito) si possono ottenere come le *equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\mathbb{L}_n = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0 \quad (1.1)$$

o, equivalentemente, se i moti permessi $q^n(t)$ soddisfano un *principio variazionale*

$$\delta S[q^n] := \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} S[q^n + \varepsilon \delta q^n] = \int dt \frac{\delta S}{\delta q^n(t)} \delta q^n(t) = 0 \quad (1.2)$$

dove le δq^n sono opportune funzioni del tempo che si annullano agli istanti iniziale e finale del moto. Il funzionale S è detto l'*azione* del sistema ed è dato da

$$S[q^n] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (1.3)$$

Infine, l'ultima uguaglianza in (1.2) definisce implicitamente le *derivate funzionali* $\frac{\delta S}{\delta q^n(t)}$, che verranno utilizzate ancora in seguito.

Le equazioni (1.1) possono essere riscritte più esplicitamente come

$$W_{nm} \ddot{q}^m = - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial q^m} \dot{q}^m + \frac{\partial L}{\partial q^n} \quad (1.4)$$

dove è stata definita la *matrice cinetica* come

$$W_{nm} := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^m} \quad (1.5)$$

e dove è stata supposta nulla la dipendenza esplicita di L da t . Sistemi con dipendenza esplicita dal tempo non verranno trattati ma l'estensione della teoria sviluppata a tali casi è nella maggior parte dei casi triviale.

Le equazioni appena scritte possono essere messe in *forma normale*

$$\ddot{q}^m = W^{nm} \left(- \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial q^{m'}} \dot{q}^{m'} + \frac{\partial L}{\partial q^n} \right) \quad (1.6)$$

non appena la matrice W_{nm} ammette un'inversa W^{nm} tale che $W_{nm} W^{mn'} = \delta_n^{n'}$, ovvero non appena

$$|W_{nm}| \neq 0 \quad (1.7)$$

Ovviamente quest'ultima condizione è prettamente locale, ma verrà supposta valere (o non valere) a livello globale al fine di ottenere una descrizione unitaria del problema. Nella maggior parte dei casi fisici significativi questa ipotesi risulta soddisfatta.

La classe dei problemi per i quali la condizione (1.7) sussiste globalmente è vasta e largamente studiata (ne fanno parte ad esempio tutti i sistemi meccanici classici descritti in coordinate generalizzate, grazie alla positività della matrice cinetica). Conseguenza immediata di poter scrivere in forma normale un sistema di equazioni differenziali per il quale sono supposte valere le usuali condizioni di regolarità è l'esistenza e unicità delle soluzioni del moto. Per un sistema classico nel quale il tempo svolge il ruolo di parametro privilegiato e nel quale tutte le coordinate hanno un'interpretazione fisica immediata questa è sicuramente una caratteristica essenziale per la consistenza del sistema.

1.1.2 Singularità della funzione Lagrangiana

Un *sistema singolare* è un sistema per il quale

$$rk(W_{nm}) < N \quad (1.8)$$

In particolare, si supporrà che il rango della matrice W_{nm} sia costante e pari a M ($0 \leq M < N$) su tutto lo spazio delle (q, \dot{q}) , nonostante sia importante ricordare che questa sia un'ipotesi aggiuntiva. Un facile esempio in cui quest'ipotesi non è soddisfatta è dato da una matrice diagonale la cui entrata (che può essere addirittura \mathbb{C}^∞) sia nulla su un aperto e non nulla al di fuori: chiaramente il suo rango non è costante su tutto lo spazio. La richiesta di analiticità delle funzioni che entrano in gioco nel sistema elimina questo genere di casi patologici.

La prima considerazione riguarda il problema di mettere in forma normale il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange. La non esistenza di un'inversa W^{nm} non permette il passaggio più ovvio effettuato in (1.6). Esiste però una matrice invertibile W'^{nm} che rende le prime M righe della matrice prodotto $W_{nm}W'^{mn'}$ linearmente indipendenti tra loro e le ultime $N - M$ completamente nulle. Evidentemente moltiplicare entrambi i membri di (1.4) per W'^{nm} divide il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange in due sottosistemi: un set di M equazioni dinamiche contenenti le accelerazioni e un set di $N - M$ vincoli in cui invece esse non compaiono. In particolare i vincoli possono essere scritti nella forma

$$0 = Y^{rn} \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial q^m} \dot{q}^m + \frac{\partial L}{\partial q^n} \right) \quad \text{per } r > M \quad (1.9)$$

dove gli $N - M$ vettori Y^{rn} ($r = M + 1, \dots, N$) rappresentano il *kernel* di W_{nm} e non sono altro che le ultime $N - M$ righe di W'^{nm} .

Nella suddivisione così prodotta delle equazioni differenziali da risolvere è manifesto che il numero di quelle dinamiche sia inferiore al numero di funzioni del tempo da determinare. Questo dovrebbe già di per sé far sospettare la presenza di una certa indeterminazione nelle soluzioni delle equazioni del moto; al contrario, la presenza dei vincoli sembrerebbe poter compensare tale carenza. Se la singularità della lagrangiana sia sufficiente a determinare la presenza di una certa arbitrarietà nelle soluzioni delle equazioni del moto diventa decisamente più chiaro in ambito hamiltoniano e non verrà studiato ora; è però utile cominciare già ora a notare la connessione fra sistemi singolari e teorie in cui la dinamica non è completamente determinata dai dati iniziali.

Come si vedrà largamente più avanti (soprattutto da un punto di vista hamiltoniano), la presenza di vincoli è caratteristica di tutti i sistemi singolari. Tali vincoli ricoprono anche un ruolo decisivo nella classificazione di tali sistemi e nella generazione delle simmetrie di gauge.

1.1.3 Esempi lagrangiani di sistemi singolari

Uno dei più noti problemi di diretto interesse fisico a presentare una Lagrangiana singolare è quello della determinazione delle *geodetiche* [1, 5] (curve "di minore lunghezza") su una *varietà riemanniana*, ovvero una varietà dotata di *tensore metrico* simmetrico $g_{ij}(q)$. Supponendo che le curve cercate

abbiano norma del vettore tangente con segno costante (che verrà supposto positivo per semplicità) la quantità da minimizzare è chiaramente

$$S[q(\tau)] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{\dot{q}^i(\tau) g_{ij}(q(\tau)) \dot{q}^j(\tau)} \quad (1.10)$$

dove le derivate \dot{q} sono intese rispetto al parametro arbitrario τ . Quest'ultimo è in effetti un parametro arbitrario in quanto il funzionale S è *invariante per riparametrizzazione* come si vede dal conto seguente

$$\begin{aligned} S[\tilde{q}(\tilde{\tau})] &= \int_{\tilde{\tau}_0}^{\tilde{\tau}_1} d\tilde{\tau} \sqrt{\frac{d\tilde{q}^i}{d\tilde{\tau}} g_{ij}(\tilde{q}(\tilde{\tau})) \frac{d\tilde{q}^j}{d\tilde{\tau}}} = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{\frac{dq^i}{d\tau} g_{ij}(q(\tau)) \frac{dq^j}{d\tau} \left(\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}}\right)^2 \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau}} = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{\dot{q}^i(\tau) g_{ij}(q(\tau)) \dot{q}^j(\tau)} = S[q(\tau)] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Quella appena mostrata è a tutti gli effetti una simmetria locale dell'azione S del problema considerato. Intuitivamente, questa invarianza è legata al fatto che curve con supporti coincidenti ma differenti parametrizzazioni devono avere la stessa lunghezza, comunque tale grandezza sia definita. Ci si trova allora davanti a un sistema di gauge con Lagrangiana singolare

$$L = \sqrt{\dot{q}^i g_{ij}(q) \dot{q}^j} \quad (1.12)$$

e matrice cinetica (la dipendenza di g_{kl} da q è sottintesa)

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \left[\sqrt{\dot{q}^k g_{kl} \dot{q}^l} \right] = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{g_{jl} \dot{q}^l + \dot{q}^k g_{kj}}{2\sqrt{\dot{q}^k g_{kl} \dot{q}^l}} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{g_{jk} \dot{q}^k}{\sqrt{\dot{q}^k g_{kl} \dot{q}^l}} \right] = \frac{g_{ij}(\sqrt{\dot{q}^k g_{kl} \dot{q}^l}) - (g_{jk} \dot{q}^k) \left(\frac{g_{il} \dot{q}^l}{\sqrt{\dot{q}^k g_{kl} \dot{q}^l}} \right)}{\dot{q}^k g_{kl} \dot{q}^l} = \\ &= \frac{g_{ij} \dot{q}^k g_{kl} \dot{q}^l - g_{jk} \dot{q}^k g_{il} \dot{q}^l}{(\dot{q}^k g_{kl} \dot{q}^l)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

È ora immediato vedere che

$$\dot{q}^i W_{ij} \propto \dot{q}^i \dot{q}^k \dot{q}^l (g_{ij} g_{kl} - g_{jk} g_{il}) = 0 \quad (1.14)$$

dove l'ultima uguaglianza nella precedente equazione è facilmente ottenuta rinominando opportunamente gli indici contratti i, k, l . La matrice W_{ij} è dunque non invertibile (si dimostra in particolare avere rango costante $N - 1$) e la teoria è singolare.

Una prima applicazione di importanza fisica fondamentale dell'esempio appena sviluppato è la dinamica della particella libera relativistica classica di massa unitaria. Le equazioni del moto si ottengono stazionarizzando l'azione

$$S[x(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau) \eta_{\mu\nu}} \quad (1.15)$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è la metrica introdotta sullo *spazio-tempo quadridimensionale di Minkowski* di segnatura $(-1, 1, 1, 1)$ e le x^μ sono le coordinate su tale spazio. La *world-line* della particella è parametrizzata dal parametro arbitrario τ .

La matrice cinetica si ottiene immediatamente sostituendo $-\eta_{\mu\nu}$ nell'ultima espressione in (1.13) (a meno di un segno negativo davanti a tutto); di conseguenza, le equazioni del moto diventano

$$\mathbb{L}_\mu = \frac{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\rho \eta_{\rho\sigma} \dot{x}^\sigma - \eta_{\mu\rho} \dot{x}^\rho \eta_{\nu\sigma} \dot{x}^\sigma}{(-\dot{x}^\rho \eta_{\rho\sigma} \dot{x}^\sigma)^{\frac{3}{2}}} \ddot{x}^\nu = \frac{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^2 - \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{(-\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} \ddot{x}^\nu = 0 \quad (1.16)$$

In questo caso, l'unico vincolo del tipo visto in (1.9) è fornito da (1.14) e consiste in

$$\dot{x}^\mu \mathbb{L}_\mu = 0 \quad (1.17)$$

che in questo caso si riduce all'identità $0 = 0$ e quindi non contribuisce a ridurre il numero di variabili dinamiche indipendenti: le soluzioni delle equazioni del moto non sono allora univocamente determinate, come era ovvio dal fatto che il parametro scelto per parametrizzare la world-line è completamente arbitrario.

È più utile per il futuro considerare l'azione *equivalente* per la particella libera relativistica:

$$S_E[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{e} - e \right] \quad (1.18)$$

Essa porge le seguenti equazioni del moto:

$$\mathbb{L}_e = e - \sqrt{-\dot{x}^2} = 0 \quad (1.19a)$$

$$\mathbb{L}_\mu = \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\dot{x}_\mu}{e} \right] \quad (1.19b)$$

Sostituendo (1.19a) in (1.19b) è facile vedere come queste equazioni siano equivalenti a quelle scritte in precedenza e come tutte le considerazioni fatte rimangano valide.

Un ultimo esempio, di interesse fisico meno immediato, lo si può trovare nei sistemi meccanici classici sottoposti a vincoli olonomi indipendenti dal tempo se questi ultimi vengono imposti tramite *moltiplicatori di Lagrange* trattati come variabili dinamiche. Ovviamente questo approccio può sembrare quantomeno innaturale e forzato, dal momento che solitamente conviene introdurre coordinate generalizzate che soddisfino identicamente i vincoli imposti. Esso verrà comunque preso in considerazione poiché è un contesto semplice in cui sviluppare la teoria generale dei sistemi singolari e poiché mostra come tale teoria si applichi a una classe di problemi più ampia di quella delle teorie di gauge.

In particolare, si consideri il sistema composto da una particella non relativistica classica di massa unitaria vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R immersa nello spazio tridimensionale (il *rotore 3D*). Esso è descritto dalla Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}_i - \lambda (\sqrt{x^i x_i} - R) \quad (1.20)$$

la matrice cinetica è data da

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

che è ovviamente non invertibile. Il sistema, studiato in questo approccio, è singolare. L'unica equazione che rappresenta un vincolo è l'equazione del moto di λ , ovvero

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_\lambda &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \sqrt{x^i x_i} - R &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

ed essa rappresenta in effetti il vincolo olonomo posto sul sistema. Le altre equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \\ \ddot{x}_i + \lambda \frac{x_i}{\sqrt{x^j x_j}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Il moto del moltiplicatore λ è determinata imponendo che il vincolo venga preservato nel tempo:

$$\frac{d}{dt} [\sqrt{x^i x_i} - R] = \frac{x_i \ddot{x}^i}{\sqrt{x^j x_j}} = 0 \quad (1.24a)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2} [\sqrt{x^i x_i} - R] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{x_i \dot{x}^i}{\sqrt{x^j x_j}} \right] = \frac{\delta_{ik} \dot{x}^k \sqrt{x^j x_j} - x_i \frac{x_k \dot{x}^k}{\sqrt{x^j x_j}}}{x^j x_j} \dot{x}^i + \frac{x_i}{\sqrt{x^j x_j}} \ddot{x}^i = \\
 &= \frac{\dot{x}^k \dot{x}_k x^j x_j - (\dot{x}^k x_k)^2}{x^j x_j} + x_i \ddot{x}^i = \dot{x}^k \dot{x}_k + x_i \ddot{x}^i = 0
 \end{aligned} \tag{1.24b}$$

Si noti che è stata utilizzata (1.24a) nel penultimo passaggio di (1.24b). Utilizzando la relazione appena trovata nelle equazioni del moto si ottiene

$$\begin{aligned}
 x^i \ddot{x}_i + \lambda \frac{x^i x_i}{\sqrt{x^j x_j}} &= 0 \\
 -\dot{x}^k \dot{x}_k + \lambda \sqrt{x^j x_j} &= 0 \\
 \lambda &= \frac{\dot{x}^k \dot{x}_k}{\sqrt{x^j x_j}}
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

e infine tornando a reinserire questa espressione esplicita di $\lambda = \lambda(x, \dot{x})$ nelle equazioni del moto per le x^i si ottengono le tre equazioni in forma normale seguenti:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_i &= -\lambda \frac{x_i}{\sqrt{x^j x_j}} \\
 \ddot{x}_i &= -\frac{\dot{x}^j \dot{x}_j}{R} \frac{x_i}{R}
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

che ammettono soluzione unica una volta specificate le condizioni iniziali, come era atteso fin dall'inizio. In questo caso non c'è alcuna arbitrarietà nei moti permessi e ciò è dovuto al fatto che il vincolo determina univocamente il moto di λ e riduce quindi di un'unità le variabili dinamiche indipendenti, che tornano a essere in corrispondenza biunivoca con le equazioni del moto vere e proprie. Si noti che le equazioni del moto trovate specificano che l'unica accelerazione presente è quella centripeta che permette il mantenimento del vincolo, come previsto. Il risultato qui verificato esplicitamente per il rotore è in realtà vero per qualunque sistema sottoposto a vincoli olonomi *ideali*, come è dimostrato in [5].

Già da ora si vede come i sistemi singolari possano avere comportamenti qualitativamente molto diversi, presentando o meno (e in misura maggiore o minore) indeterminazione nelle equazioni del moto. La classificazione dei sistemi singolari da questo punto di vista è più naturale e immediata nel formalismo hamiltoniano e verrà quindi discussa nella prossima sezione.

1.2 Trattazione hamiltoniana per sistemi finito-dimensionali

1.2.1 Caratteristiche generali

Nello spazio lagrangiano delle (q, \dot{q}) è possibile definire la funzione *integrale di Jacobi* come

$$E(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \dot{q}^n - L(q, \dot{q}) \tag{1.27}$$

Tale funzione svolge il ruolo fisico dell'*energia* del sistema ed è costante lungo i moti per sistemi conservativi. È inoltre uno dei due ingredienti fondamentali per il passaggio dalla trattazione lagrangiana a quella hamiltoniana di un sistema.

L'altro ingrediente è la *trasformata di Legendre*, una mappa che manda le q^n nelle q^n stesse e definisce i relativi *momenti coniugati* come

$$p_n(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}(q, \dot{q}) \tag{1.28}$$

Nei sistemi non singolari, la condizione

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^m} \right| \neq 0 \quad (1.29)$$

equivale a

$$\left| \frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}^m} \right| \neq 0 \quad (1.30)$$

e quindi implica l'invertibilità delle p_n rispetto alle \dot{q}^n . Si possono allora considerare come nuove variabili indipendenti le (p, q) , che formano il cosiddetto *spazio delle fasi*, ed esprimere rispetto ad esse tutte le funzioni dinamiche. In particolare, si definisce la *funzione Hamiltoniana* come

$$H(q, p) = E(q, \dot{q}(q, p)) \quad (1.31)$$

Questa funzione determina tutta la dinamica del sistema nelle nuove variabili attraverso le *equazioni di Hamilton*, equivalenti a quelle di Eulero-Lagrange

$$\begin{cases} \dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} \end{cases} \quad (1.32)$$

Si definiscono poi le *parentesi di Poisson* delle funzioni F e G come

$$\{F, G\} := \frac{\partial F}{\partial q^n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial G}{\partial q^n} = \frac{\partial F}{\partial w^{n'}} \sigma^{n'm'} \frac{\partial G}{\partial w^{m'}} \quad (1.33)$$

dove $w^{n'}$ è il nome collettivo per le variabili nello spazio delle fasi e

$$\sigma^{n'm'} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_N \\ -\mathbb{I}_N & 0 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

è la *matrice simplettica*. Grazie alle parentesi di Poisson è possibile scrivere per ogni funzione dello spazio delle fasi

$$\dot{f} = \{f, H\} \quad (1.35)$$

1.2.2 Singularità della trasformata di Legendre

Come si è visto, ipotesi fondamentale per ottenere l'invertibilità della trasformata di Legendre è la non singolarità del sistema. Non appena questa condizione non è soddisfatta e il rango della matrice cinetica risulta pari a $M < N$, la trasformata di Legendre cessa di essere biettiva e diventa una mappa dallo spazio N -dimensionale delle (q, \dot{q}) ad una sottovarietà M -dimensionale immersa nello spazio delle fasi e descritta dalle equazioni, dette *vincoli primari*

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad (1.36)$$

La superficie che rimane così definita è detta *superficie di vincolo primaria*. Le condizioni appena scritte sono equazioni nelle (q, p) e identità nelle (q, \dot{q}) : nascono infatti dalla definizione dei momenti coniugati attraverso un'applicazione singolare. Se è vero che ogni coppia (q, \dot{q}) viene mandata in modo univoco in una coppia corrispondente (q, p) dalla trasformata di Legendre singolare definita, l'inverso non è più vero: l'antimmagine di un punto (q, p) della superficie definita da (1.36) è una sottovarietà $(N - M)$ -dimensionale nello spazio delle (q, \dot{q}) . È ora importante capire che lo spazio delle fasi qui e d'ora in avanti va inteso come preesistente alla trasformata di Legendre e formato da tutte le possibili coppie (q, p) . Solo sulla superficie di vincolo primaria i momenti sono definiti da (1.28), ma essi esistono anche al di fuori di tale superficie, dove non sono legati alle (q, \dot{q}) dello spazio lagrangiano da nessuna relazione particolare.

Dal momento che la superficie definita da opportuni vincoli nello spazio delle fasi assumerà nel seguito un'importanza fondamentale, conviene introdurre il concetto di validità *on-shell* (di una data proprietà), ovvero di validità su tutti i punti della superficie in questione senza riguardo a quelli esterni

ad essa. Per due funzioni $F(q, p)$ e $G(q, p)$ uguali on-shell (ma che possono differire *off-shell*, ovvero al di fuori della superficie considerata) si scriverà

$$F \approx G \quad (1.37)$$

In particolare vale

$$p_n \approx \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \quad (1.38)$$

Data l'impossibilità di invertire le p_n in funzione delle \dot{q}^n , non è possibile in generale scrivere una funzione delle (q, \dot{q}) come funzione delle (q, p) . In particolare, ciò è possibile solo per quelle particolari funzioni che dipendono dalle \dot{q}^n solo attraverso le p_n , ovvero che assumono un solo valore su ciascuna antimmagine dei punti (q, p) . A questa classe di funzioni appartiene anche l'integrale di Jacobi: infatti

$$dE = dp_n \dot{q}^n + p_n d\dot{q}^n - dL = dp_n \dot{q}^n + p_n d\dot{q}^n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} d\dot{q}^n - \frac{\partial L}{\partial q^n} dq^n \approx \dot{q}^n dp_n - \frac{\partial L}{\partial q^n} dq^n \quad (1.39)$$

dove il differenziale dp_n va inteso pensando le (q, \dot{q}) come variabili indipendenti. La funzione Hamiltoniana rimane allora definita, ma solo on-shell a causa della singolarità della trasformata di Legendre. Off-shell la sua espressione è invece sconosciuta. Si dimostra [6] che la forma più generale di una funzione nulla sulla superficie definita da (1.36) è una combinazione dei vincoli ϕ_m stessi. Di conseguenza, la forma più generale della funzione Hamiltoniana è

$$H = H_0 + c^m \phi_m \quad (1.40)$$

dove H_0 è l'espressione di H ottenuta dalla trasformata di Legendre singolare e i coefficienti c^m sono subito identificati come moltiplicatori di Lagrange e non sono da intendere come ulteriori variabili indipendenti, ma come funzioni (determinate o meno) dello spazio delle fasi. La formula (1.40) ha un'importanza fondamentale poiché d'ora in avanti la funzione Hamiltoniana di un sistema singolare sarà data da questa espressione generale.

1.2.3 Algoritmo di consistenza

È stato visto come il legame fra formalismo lagrangiano e hamiltoniano sia chiaro solo sulla superficie di vincolo primario. Lo spazio al di fuori di tale superficie è un'aggiunta ottenuta dall'aver effettuato una trasformazione di Legendre singolare e, a meno di dichiarare il punto di vista lagrangiano inadatto alla descrizione del sistema, va eliminato in qualche modo. In particolare, gli stati esterni alla superficie di vincolo verranno dichiarati *non fisici*, in contrapposizione a quelli appartenenti alla superficie detti *fisici*.

In generale, non c'è alcuna garanzia che i moti che partono da uno stato iniziale fisico rimangano sulla superficie di vincolo per tutti i tempi. Questa condizione di consistenza della teoria va imposta come restrizione ulteriore sugli stati ammissibili. In particolare, dovrà essere imposta la preservazione nel tempo dei vincoli primari ottenuti

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H\} \approx 0 \quad (1.41)$$

La condizione appena imposta può ridursi a un'identità banalmente soddisfatta, a una combinazione dei vincoli già esistenti o a una condizione aggiuntiva rispetto ai vincoli primari. In quest'ultimo caso si parla di *vincoli secondari*. Ora la procedura va ripetuta per i nuovi vincoli ottenuti e iterata fino a che non si trovino condizioni dipendenti da quelle già ottenute o equazioni che possono essere risolte per i moltiplicatori di Lagrange c^m apparsi in (1.40). In quest'ultimo caso, non si parla di vincoli (poiché non vi è alcuna restrizione ulteriore dello spazio delle fasi) ma di *condizioni sui moltiplicatori di Lagrange*. Quando la procedura è ultimata, la superficie descritta dall'intero set di J vincoli ϕ_j così ottenuti è detta semplicemente *superficie di vincolo* ed è lo spazio (chiuso per evoluzione temporale) a cui i moti fisici del sistema devono appartenere per garantire la consistenza della teoria. La definizione di stati fisici o non fisici va ora utilizzata in riferimento alla nuova superficie ottenuta. La procedura

appena mostrata passa sotto il nome di *algoritmo di consistenza*.

Può però capitare che non tutti i vincoli così ottenuti siano indipendenti fra loro: si parla, in tal caso, di *vincoli riducibili*. Localmente, è sempre possibile eliminare un certo numero di condizioni fino a tornare al caso di *vincoli irriducibili*, ovvero indipendenti. La procedura potrebbe però essere non affrontabile a livello pratico, oppure potrebbe far perdere al sistema altre preziose caratteristiche (come l'invarianza manifesta sotto certe simmetrie) o ancora potrebbe essere impossibile a livello globale a causa di ostruzioni topologiche. È allora indispensabile sviluppare una teoria che tenga conto anche di un'eventuale riducibilità dei vincoli. Dato che l'argomento presenta molte più difficoltà tecniche che concettuali, non verrà più preso in considerazione nella tesi, nella quale si considererà sempre soddisfatta l'ipotesi di irriducibilità dei vincoli.

1.2.4 Funzioni di prima e seconda classe

Se si ha a disposizione un set completo di vincoli per il sistema in esame, si può dividere l'intera classe delle funzioni dello spazio delle fasi in due sottoclassi: quella delle funzioni che commutano on-shell con tutti i vincoli (*funzioni di prima classe*) e quelle che non commutano con almeno un vincolo (*funzioni di seconda classe*). Ciò significa che $F = F(q, p)$ è di prima classe se e solo se

$$\{F, \phi_m\} \approx 0 \quad \forall m \quad (1.42)$$

Dato che anche i vincoli sono funzioni dello spazio delle fasi, la suddivisione appena mostrata riguarda anch'essi: si possono così distinguere i *vincoli di prima classe*, che verranno denotati con γ_α , dai *vincoli di seconda classe*, che verranno invece denotati con χ_a . Si noti che sostituendo a un vincolo di seconda classe χ il vincolo equivalente χ^2 , si trasforma un vincolo di seconda classe in un vincolo di prima classe senza cambiare in alcun modo la superficie di vincolo. Se infatti ϕ è un qualsiasi altro vincolo, si ha

$$\{\chi^2, \phi\} = 2\chi\{\chi, \phi\} \approx 0 \quad (1.43)$$

L'ambiguità scompare se sui vincoli vengono poste opportune *condizioni di regolarità*, ovvero viene richiesto che i rispettivi gradienti siano tutti linearmente indipendenti on-shell. Tra le altre cose, ciò comporta che i vincoli possano essere utilizzati per completare localmente un set di coordinate sulla superficie di vincolo a un set di coordinate nello spazio delle fasi. Per una caratterizzazione geometrica e indipendente dalle condizioni di regolarità dei vincoli di prima e seconda classe si veda [6].

La suddivisione può essere riassunta nella *matrice dei vincoli* antisimmetrica M_{jk} definita come segue

$$M_{jk} = \{\phi_j, \phi_k\} \quad (1.44)$$

In linea teorica è sempre possibile ridefinire i vincoli per ottenere una matrice in cui compaiono solamente righe o linearmente indipendenti o completamente nulle (si ricordi che i vincoli sono supposti irriducibili). È allora possibile estrarre la sottomatrice non nulla C_{ab} di rango massimo corrispondente alla matrice dei vincoli di seconda classe della teoria:

$$C_{ab} = \{\chi_a, \chi_b\} \quad (1.45)$$

Una matrice antisimmetrica può avere rango massimo solo se la sua dimensione è pari: ne consegue che i vincoli di seconda classe sono sempre in numero pari.

Si noti inoltre che una matrice antisimmetrica di rango massimo può essere sempre portata, tramite cambio di coordinate, nell'unità simplettica: questo è indicativo del fatto che i vincoli di seconda classe possono essere utilizzati, almeno vicino alla superficie di vincolo, come coordinate canoniche a due a due coniugate.

1.2.5 Esempi hamiltoniani di sistemi singolari

Scopo di questa sezione è applicare la teoria appena sviluppata agli esempi presentati precedentemente nell'ambito del formalismo lagrangiano.

Considerando prima la particella libera relativistica nel formalismo dell'azione equivalente, i momenti coniugati sono

$$p_\mu = \frac{\dot{x}_\mu}{e} \quad (1.46a)$$

$$p_e = 0 \quad (1.46b)$$

Chiaramente l'equazione (1.46b) è un vincolo primario. L'Hamiltoniana diventa

$$\begin{aligned} H_0 &= p_\mu \dot{x}^\mu + p_e \dot{e} - \frac{1}{2} \left[\frac{(\dot{x}^\mu)^2}{e} - e \right] + u p_e = \\ &= e p^2 - \frac{1}{2} e p^2 + \frac{e}{2} + p_e \dot{e} + u p_e = \frac{e}{2} (p^2 + 1) + p_e \dot{e} + u p_e \rightarrow \frac{e}{2} (p^2 + 1) + u p_e \end{aligned} \quad (1.47)$$

dove all'ultimo passaggio è stato semplicemente ridefinito il moltiplicatore di Lagrange u . L'algoritmo di consistenza porge subito il vincolo secondario

$$p^2 + 1 = 0 \quad (1.48)$$

detta solitamente *condizione di mass-shell*. Nessun altro vincolo nè condizione sui moltiplicatori di Lagrange appare: gli unici due vincoli della teoria sono ovviamente di prima classe. Il moltiplicatore u (che appare per aver trattato e come una normale variabile dinamica) rimane indeterminato.

Che non tutti i momenti fossero indipendenti era ovvio dal fatto che in meccanica non relativistica una particella libera ha solo 3 gradi di libertà e non 5. Inoltre l'Hamiltoniana è una combinazione dei vincoli e si annulla on-shell: questa è una caratteristica di tutti i sistemi con libertà di riparametrizzazione totale [6].

È anche possibile tornare a trattare e come un semplice moltiplicatore all'interno dell'Hamiltoniana, ovvero una funzione (determinata o meno) dello spazio delle fasi e non più una variabile dinamica indipendente. In questo modo (1.46b) scompare (poiché e non ha più un suo momento coniugato p_e) mentre (1.48) diventa l'unico vincolo, a questo punto primario. Si vede subito che e rimane libero in quanto non compaiono condizioni sui moltiplicatori. Il sistema così ottenuto è perfettamente equivalente a quello di partenza.

Per quanto riguarda il rotore $3D$, l'ovvio vincolo primario consiste nell'annullamento del momento coniugato al moltiplicatore di Lagrange

$$\phi_1 = p_\lambda \approx 0 \quad (1.49)$$

L'Hamiltoniana si trova come

$$H = p_i \dot{x}^i + p_\lambda \dot{\lambda} - L \approx \frac{1}{2} p_i p^i + \lambda (\sqrt{x^i x_i} - R) \quad (1.50)$$

Come al solito, l'espressione sull'intero spazio delle fasi sarà del tipo

$$H = \frac{1}{2} p_i p^i + \lambda (\sqrt{x^i x_i} - R) + u p_\lambda \quad (1.51)$$

con u moltiplicatore di Lagrange per il vincolo primario. Questa volta l'algoritmo di consistenza produce vincoli secondari non banali:

$$\phi_2 = \dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H\} = \sqrt{x^i x_i} - R \quad (1.52a)$$

$$\phi_3 = \dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H\} = \frac{x_k}{\sqrt{x^i x_i}} \{x^k, p_l\} p^l = \frac{x_k}{\sqrt{x^i x_i}} \delta_l^k p^l = \frac{x_k p^k}{\sqrt{x^i x_i}} \quad (1.52b)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_4 = \dot{\phi}_3 = \{\phi_3, H\} &= \left\{ \frac{x_k p^k}{\sqrt{x^i x_i}}, p_j p^j \right\} + 2\lambda \left\{ \frac{x_k p^k}{\sqrt{x^i x_i}}, \sqrt{x^j x_j} \right\} = \\
 &= p^k \frac{x^i x_i \delta_l^k - x^k x_l}{(x^j x_j)^{\frac{3}{2}}} \{x^l, p_h\} 2p^h + 2\lambda \frac{x_k}{\sqrt{x^i x_i}} \{p^k, x_l\} \frac{x^l}{\sqrt{x^j x_j}} = \\
 &= 2p^k \frac{x^i x_i \delta_l^k - x^k x_l}{(x^j x_j)^{\frac{3}{2}}} \delta_h^l p^h + 2\lambda \frac{x_k}{\sqrt{x^i x_i}} \delta_l^k \frac{x^l}{\sqrt{x^j x_j}} = \\
 &= 2 \frac{x^i x_i p_k p^k - x^k p_k x_l p^l}{(x^j x_j)^{\frac{3}{2}}} + 2\lambda \approx \\
 &\approx 2 \frac{p_k p^k}{R} + 2\lambda
 \end{aligned} \tag{1.52c}$$

I primi due vincoli secondari hanno un'ovvia interpretazione fisica: il primo è quello che esprime il vincolo olonomo imposto sulla particella di appartenere alla sfera di raggio R , mentre il secondo impone l'annullamento della sua componente radiale del momento. Se quest'ultima condizione non fosse soddisfatta, evidentemente il vincolo olonomo non potrebbe preservarsi nel tempo. Imponendo la conservazione nel tempo anche di ϕ_4 si trova infine

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_4 = \{\phi_4, H\} &= \left\{ 2 \frac{x^i x_i p_k p^k - x^k p_k x_l p^l}{(x^j x_j)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{2} p_i p^i + \lambda(\sqrt{x^i x_i} - R) \right\} + \{2\lambda, u p_\lambda\} = \\
 &= \left\{ 2 \frac{x^i x_i p_k p^k - x^k p_k x_l p^l}{(x^j x_j)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{2} p_i p^i + \lambda(\sqrt{x^i x_i} - R) \right\} + 2u \approx 0
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

L'ultima equazione si riduce a una condizione su u . Questa volta il moltiplicatore di Lagrange u evolve in modo completamente determinato e non c'è alcuna indeterminazione nel sistema.

Anche in questo caso, sarebbe stato possibile adottare un punto di vista differente. Una volta effettuata la trasformata di Legendre singolare trattando λ al pari delle altre variabili dinamiche, si sarebbe potuto tornare a pensarla nuovamente come moltiplicatore di Lagrange del vincolo (ora considerato primario) ϕ_2 . In questo approccio, ϕ_1 e la condizione su u scompaiono, mentre ϕ_4 diventa una condizione sui moltiplicatori (ora rappresentati da λ) e non più un vincolo. La dinamica in questa visuale, governata dall'Hamiltoniana semplificata

$$H = \frac{1}{2} p_i p^i + \lambda(\sqrt{x^i x_i} - R) \tag{1.54}$$

è perfettamente equivalente a quella sviluppata inizialmente.

Nel secondo approccio, la matrice dei vincoli risulta

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \{\sqrt{x^i x_i} - R, \sqrt{x^i x_i} - R\} & \{\sqrt{x^i x_i} - R, \frac{x_k p^k}{\sqrt{x^i x_i}}\} \\ \{\frac{x_k p^k}{\sqrt{x^i x_i}}, \sqrt{x^i x_i} - R\} & \{\frac{x_k p^k}{\sqrt{x^i x_i}}, \frac{x_k p^k}{\sqrt{x^i x_i}}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.55}$$

In questo caso la matrice è già di rango massimo e nella forma dell'unità симплектика. In effetti, questo sistema rappresenta una semplice verifica del fatto che i vincoli secondari possono essere usati come parte di un set di coordinate canoniche nello spazio delle fasi. Le coordinate in questione sono quelle sferiche, nelle quali la Lagrangiana diventa

$$L = \frac{1}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] - \lambda(r - R) \tag{1.56}$$

I momenti coniugati sono allora definiti come

$$p_r = \dot{r} \tag{1.57a}$$

$$p_\theta = r^2 \dot{\theta} \tag{1.57b}$$

$$p_\varphi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \tag{1.57c}$$

e l'Hamiltoniana diventa

$$H = \frac{1}{2} \left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + \lambda(r - R) \quad (1.58)$$

Infine i vincoli ora si scrivono come

$$r - R \approx 0 \quad (1.59a)$$

$$p_r \approx 0 \quad (1.59b)$$

da cui si vede che, a meno di ininfluenti traslazioni per costanti, sono stati utilizzati i vincoli di seconda classe come nuove coordinate canoniche fuori dalla superficie di vincolo (mentre θ , φ e i rispettivi momenti rimangono le coordinate sulla superficie di vincolo)

1.3 Teorie di campo classiche

1.3.1 Caratteristiche generali

Con *teorie di campo* si intende una classe di teorie fisiche in cui le variabili dinamiche usuali sono sostituite da, appunto, *campi*, ovvero funzioni (sufficientemente regolari) dello spazio-tempo. Dal punto di vista della meccanica classica ciò equivale a un sistema con un numero infinito (e continuo) di gradi di libertà (ognuno per ogni punto dello spazio) che evolve nel tempo: gli oggetti studiati saranno allora del tipo $\Phi_r = \Phi_r(\mathbf{x}, x^0) = \Phi_r(x)$. Talvolta le espressioni saranno calcolate a un tempo fissato e i campi saranno pensati come funzioni delle sole variabili spaziali \mathbf{x} e dipendenti dal parametro x^0 , che non verrà espresso per alleggerire la notazione. Ai funzionali $A[q^n]$ delle variabili dinamiche e delle loro traiettorie nel tempo verranno invece sostituiti funzionali $A[\Phi_r]$ che dipendono dai campi e dalle loro derivate spaziali e temporali. Tutti i funzionali che verranno considerati nel seguito sono *locali*, ovvero possono essere scritti come l'integrale di una funzione dei campi e delle loro derivate spaziotemporali prime detta *densità del funzionale*:

$$A[\Phi_r] = \int d^D x a(\Phi_r(x), \partial_\mu \Phi_r(x)) \quad (1.60)$$

dove la dimensione generica D indica il numero di variabili spazio-temporali da cui sono intesi dipendere i campi: le restanti vengono considerate parametri su cui non avviene l'integrazione e da cui continua a dipendere anche il funzionale. Ad esempio, se $D = 3$ i campi sono intesi come funzioni delle variabili spaziali \mathbf{x} per ogni valore fissato del tempo x^0 , e il funzionale assumerà un valore diverso istante per istante; se $D = 4$ i campi sono considerati funzioni di tutte le variabili spazio-temporali x e il relativo funzionale non dipenderà dal tempo.

Anche in teoria di campo si definiscono le derivate funzionali $\frac{\delta A}{\delta \Phi(\mathbf{x})}$ a tempo fissato x^0 in modo implicito attraverso

$$\delta A[\Phi_r] := \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} A[\Phi_r + \varepsilon \delta \Phi_r] = \int d^3 x \frac{\delta A}{\delta \Phi_r(\mathbf{x})} \delta \Phi_r(\mathbf{x}) \quad (1.61)$$

dove i $\delta \Phi_r$ sono campi qualsiasi delle variabili spaziali e del tempo, calcolati anch'essi all'istante fissato x^0 , che si annullano su tutto lo spazio agli istanti iniziale e finale del moto. Tali derivate possono essere calcolate passando per la densità del funzionale. Infatti

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta \int d^3 x a(\Phi_r, \partial_\mu \Phi_r) = \int d^3 x \delta a(\Phi_r, \partial_\mu \Phi_r) = \\ &= \int d^3 x \left[\frac{\partial a}{\partial \Phi_r} \delta \Phi_r + \frac{\partial a}{\partial \partial_\mu \Phi_r} \partial_\mu \delta \Phi_r \right] = \int d^3 x \left[\frac{\partial a}{\partial \Phi_r} \delta \Phi_r - \partial_\mu \frac{\partial a}{\partial \partial_\mu \Phi_r} \delta \Phi_r \right] = \\ &= \int d^3 x \left[\frac{\partial a}{\partial \Phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial a}{\partial \partial_\mu \Phi_r} \right] \delta \Phi_r \end{aligned} \quad (1.62)$$

dove nell'ultimo passaggio è stata eseguita un'integrazione per parti sfruttando l'annullamento all'infinito spaziale dei campi fisici. Si sono così trovate esplicitamente le derivate funzionali di A :

$$\frac{\delta A}{\delta \Phi_r(\mathbf{x})} = \frac{\partial a}{\partial \Phi_r}(\mathbf{x}) - \partial_\mu \frac{\partial a}{\partial \partial_\mu \Phi_r}(\mathbf{x}) = \int d^3 y \left[\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial a}{\partial \Phi_r}(\mathbf{y}) + \partial_\mu^{(\mathbf{y})} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial a}{\partial \partial_\mu \Phi_r}(\mathbf{y}) \right] \quad (1.63)$$

A posteriori, si vede che conviene definire per una qualsiasi funzione dei campi $\xi(\mathbf{x}) = \xi(\Phi_r(\mathbf{x}), \partial_\mu \Phi_r(\mathbf{x}))$

$$\frac{\delta \xi(\mathbf{x})}{\delta \Phi_r(\mathbf{y})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \xi}{\partial \Phi_r}(\mathbf{x}) + \partial_\mu^{(\mathbf{x})} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \xi}{\partial \partial_\mu \Phi_r}(\mathbf{x}) \quad (1.64)$$

e supporre poi che tali derivazioni commutino con l'operazione di integrazione spaziale per ritrovare la definizione data in precedenza per i funzionali integrati. Le definizioni appena riportate coinvolgono i campi come funzioni delle sole variabili spaziali, ma esse possono essere facilmente estese al caso di funzioni dello spazio-tempo sostituendo in tutte le espressioni x a \mathbf{x} e δ^4 a δ^3 .

Una teoria di campo ammette una descrizione lagrangiana se esiste una *densità di Lagrangiana* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_r(x^\mu), \partial_\mu \Phi_r(x^\mu), x^\mu)$ a cui è associata il funzionale dipendente dal tempo Lagrangiana

$$L = \int d^3 x \mathcal{L} \quad (1.65)$$

e il funzionale indipendente dal tempo detto azione

$$S = \int dt L = \int d^4 x \mathcal{L} \quad (1.66)$$

tale che le equazioni del moto (dette ancora equazioni di Eulero-Lagrange) per i campi si scrivano come

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi_r(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_r}(x) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_r}(x) = 0 \quad (1.67)$$

Nel seguito si considereranno solo teorie in cui \mathcal{L} non mostra dipendenza esplicita dalle coordinate, ma la teoria sviluppata nelle prossime sezioni si estende nella maggior parte dei casi a teorie in cui questa ipotesi non sia soddisfatta.

Il passaggio alla trattazione hamiltoniana ricalca quella dei sistemi finito-dimensionali. I momenti coniugati sono definiti attraverso la trasformata di Legendre

$$\Pi^r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \Phi_r} \quad (1.68)$$

La *densità di Hamiltoniana* è

$$\mathcal{H} = \Pi^r \partial_0 \Phi_r - \mathcal{L} \quad (1.69)$$

mentre l'Hamiltoniana si ottiene integrando su tutto lo spazio la relativa densità

$$H = \int d^3 x \mathcal{H} \quad (1.70)$$

Nel formalismo hamiltoniano le derivate funzionali sono definite in maniera analoga a (1.61), sostituendo alla somma sui soli $\delta \Phi_r$ una che coinvolga anche le variazioni dei momenti $\delta \Pi^r$. Attraverso questa definizione le parentesi di Poisson in teoria di campo sono date da

$$\{A, B\} := \int d^3 y \left[\frac{\delta A}{\delta \Phi_r(\mathbf{y})} \frac{\delta B}{\delta \Pi^r(\mathbf{y})} - \frac{\delta A}{\delta \Pi^r(\mathbf{y})} \frac{\delta B}{\delta \Phi_r(\mathbf{y})} \right] \quad (1.71)$$

dove tutti i campi sono calcolati allo stesso tempo. Grazie ad esse l'equazione del moto per le funzioni dei campi assume la solita espressione compatta

$$\partial_0 \xi = \{\xi, H\} \quad (1.72)$$

Chiaramente, anche una teoria di campo può essere singolare (in un senso analogo a quello delle teorie finito-dimensionali). Una trattazione esaustiva dell'argomento è riportata in [19]. In questo caso i vincoli imposti nello spazio delle fasi sono dati da equazioni algebriche o differenziali. Tutta la costruzione rimane pressoché inalterata (algoritmo di consistenza, suddivisione dei vincoli, etc.), salvo sostituire alle somme sui gradi di libertà della teoria delle integrazioni spaziali e alle parentesi di Poisson usuali quelle definite in (1.71).

1.3.2 Elettrodinamica massiva classica

La più nota e studiata fra le teorie di campo classiche è senza dubbio l'*elettromagnetismo*, descritto dalle *equazioni di Maxwell*[11], che nel caso di *campo libero*, ovvero privo di sorgenti, assumono la semplice forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (1.73)$$

Esse sono equazioni nelle variabili dinamiche A^μ , mentre il *tensore elettromagnetico* è definito come $F^{\mu\nu} := \partial^{[\mu} A^{\nu]} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. È facile verificare che le (1.73) sono le equazioni di Eulero-Lagrange per la densità di Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.74)$$

dalla quale si trovano i momenti coniugati come

$$\Pi^\mu \approx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_\mu} = -F^{0\mu} = F^{\mu 0} \quad (1.75)$$

È evidente l'insorgenza del vincolo primario $\phi_1 = \Pi^0 \approx 0$, che permette l'identificazione di A_0 come un moltiplicatore di Lagrange della teoria. L'Hamiltoniana è ricavata come al solito come

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\approx \Pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} \approx \Pi^i \partial_0 A_i - \mathcal{L} \approx \\ &\approx \Pi^i (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) + \Pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \approx \\ &\approx -\Pi^i \Pi_i + \partial_i (\Pi^i A_0) - \partial_i \Pi^i A_0 + \frac{1}{4}(2\Pi_i \Pi^i + F_{ij}F^{ij}) = \\ &= -\frac{1}{2}\Pi^i \Pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - A_0 \partial_i \Pi^i + \partial_i (\Pi^i A_0) \end{aligned} \quad (1.76)$$

Dato che nell'integrazione spaziale per ottenere l'Hamiltoniana le divergenze spaziali danno contributo nullo per il *teorema di Gauss* unito alle usuali ipotesi di annullamento all'infinito spaziale dei campi fisici, si può scrivere la densità di Hamiltoniana equivalente

$$\mathcal{H} \approx -\frac{1}{2}\Pi^i \Pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - A_0 \partial_i \Pi^i \quad (1.77)$$

Che nello spazio delle fasi totale diventa

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\Pi^i \Pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - A_0 \partial_i \Pi^i + u \Pi^0 \quad (1.78)$$

e una volta integrata su tutto lo spazio porta all'Hamiltoniana H . Imponendo la preservazione del vincolo primario si trova un vincolo secondario non banale

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \partial_0 \phi_1 = \{\Pi^0(\mathbf{x}), H\} = \\ &= \int d^3y \left[-\frac{\delta \Pi^0(\mathbf{x})}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{y})} \frac{\delta H}{\delta A_\mu(\mathbf{y})} \right] = \\ &= -\int d^3y \delta^{0\mu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_\mu}(\mathbf{y}) = \\ &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_0}(\mathbf{x}) = \partial_i \Pi^i(\mathbf{x}) \approx 0 \end{aligned} \quad (1.79)$$

che altro non è che la *legge di Gauss*. Il passo successivo dell'algoritmo di consistenza porta a

$$\begin{aligned} \partial_0 \phi_2 &= \{\partial_i \Pi^i(\mathbf{x}), H\} = \int d^3y \left[-\frac{\delta \partial_i \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{y})} \frac{\delta H}{\delta A_\mu(\mathbf{y})} \right] = \\ &= -\int d^3y \partial_i^{(\mathbf{x})} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\delta H}{\delta A_i(\mathbf{y})} = \int d^3y \partial_i^{(\mathbf{y})} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\delta H}{\delta A_i(\mathbf{y})} = -\partial_i \frac{\delta H}{\delta A_i(\mathbf{x})} = \\ &= -\partial_i \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_i}(\mathbf{x}) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial_\mu A_i}(\mathbf{x}) \right] = \partial_i \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu A_i} \left[-\frac{1}{4}F_{jk}F^{jk} \right](\mathbf{x}) = \\ &= -\frac{1}{2} \partial_i \partial_\mu \left[F_{jk} \frac{\partial}{\partial \partial_\mu A_i} F^{jk} \right](\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \partial_i \partial_\mu \left[F_{jk} (\eta^{\mu j} \eta^{ik} - \eta^{\mu k} \eta^{ij}) \right](\mathbf{x}) = -\partial^j \partial^k F_{jk}(\mathbf{x}) \approx 0 \end{aligned} \quad (1.80)$$

che è automaticamente soddisfatta per antisimmetria su tutto lo spazio delle fasi. I vincoli totali sono allora due e, dato che entrambi riguardano solo i momenti, è ovvio che abbiano mutue parentesi di Poisson nulle e siano quindi vincoli di prima classe. Non sono apparse condizioni su u : tale moltiplicatore di Lagrange non ha dunque dinamica determinata.

È consistente considerare una teoria ottenuta da quella appena discussa aggiungendo a (1.74) un *termine di massa*. La nuova densità di Lagrangiana (*Lagrangiana di Proca*) è allora

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu \quad (1.81)$$

da cui si ricavano le equazioni

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu = 0 \quad (1.82)$$

La teoria è detta *elettromagnetismo massivo*. Dato che non sono stati aggiunti termini contenenti le velocità, i momenti coniugati sono definiti allo stesso modo, mentre l'Hamiltoniana viene modificata come

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\Pi^i\Pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu - A_0\partial_i\Pi^i + u\Pi^0 \quad (1.83)$$

Il vincolo primario $\Pi^0 \approx 0$ rimane inalterato, mentre il vincolo secondario guadagna un contributo dovuto al nuovo termine di massa pari a

$$\{\Pi^0(\mathbf{x}), \int d^3y \frac{m^2}{2} A^\mu(\mathbf{y}) A_\mu(\mathbf{y})\} = -\frac{m^2}{2} \frac{\partial}{\partial A_0} [A^\mu A_\mu](\mathbf{x}) = -m^2 A^0(\mathbf{x}) \quad (1.84)$$

e diventa dunque una sorta di legge di Gauss modificata, data da $\partial_i\Pi^i - m^2 A^0 \approx 0$. Reinserendo quest'ultima espressione nell'algoritmo di consistenza si ottiene la condizione sul moltiplicatore di Lagrange

$$\begin{aligned} \{\partial_i\Pi^i(\mathbf{x}) - m^2 A^0(\mathbf{x}), H\} &= \{\partial_i\Pi^i(\mathbf{x}), H\} - m^2\{A^0(\mathbf{x}), H\} = \\ &= \frac{m^2}{2}\{\partial_i\Pi^i(\mathbf{x}), \int d^3y A^\mu(\mathbf{y}) A_\mu(\mathbf{y})\} - m^2 u(\mathbf{x})\{A^0(\mathbf{x}), \int d^3y \Pi^0(\mathbf{y})\} = \\ &= -m^2 \int d^3z \frac{\delta\partial_i\Pi^i(\mathbf{x})}{\delta\Pi^\nu(\mathbf{z})} \frac{\delta A_\mu(\mathbf{y})}{\delta A_\nu(\mathbf{z})} A^\mu(\mathbf{y}) + u(\mathbf{x})m^2 = \\ &= -m^2 \int d^3z \delta_\nu^i \partial_i^{\mathbf{x}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) A^\mu(\mathbf{y}) + u(\mathbf{x})m^2 = \\ &= m^2 \int d^3z \partial_i^{\mathbf{z}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) A^i(\mathbf{y}) + u(\mathbf{x})m^2 = \\ &= -m^2 \int d^3z \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \partial_i^{\mathbf{z}} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) A^i(\mathbf{y}) + u(\mathbf{x})m^2 = \\ &= m^2 \int d^3z \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \partial_i^{\mathbf{y}} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) A^i(\mathbf{y}) + u(\mathbf{x})m^2 = \\ &= -m^2 \int d^3z \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \partial_i A^i(\mathbf{y}) + u(\mathbf{x})m^2 = \\ &= m^2(u(\mathbf{x}) - \partial_i A^i(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (1.85)$$

che determina

$$\partial_0 A^0 = \{A^0, H\} = u\{A^0, \Pi^0\} \approx -\partial_i A^i \Rightarrow \partial_\mu A^\mu \approx 0 \quad (1.86)$$

Ora si ha

$$\{\Pi^0(\mathbf{x}), \partial_i\Pi^i(\mathbf{x}) - m^2 A^0(\mathbf{y})\} = -m^2\{\Pi^0(\mathbf{x}), A_0(\mathbf{y})\} = m^2\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.87)$$

che qualifica i due vincoli trovati come di seconda classe.

Come per il rotore, anche per il campo elettromagnetico (sia normale che massivo) è possibile anche il punto di vista che vede A_0 come semplice moltiplicatore di Lagrange e lascia la legge di Gauss come unico vincolo della teoria.

Capitolo 2

Teorie di gauge classiche

2.1 Trasformazioni di gauge nel formalismo hamiltoniano

2.1.1 Hamiltoniana totale

Nel precedente capitolo è stato visto come nell'ambito del formalismo hamiltoniano i vincoli di un sistema singolare si dividano in modo non ambiguo in due classi, e come per sistemi diversi la dinamica dei moltiplicatori di Lagrange possa essere o meno determinata dallo stato del sistema a un dato istante. Scopo di questa sezione è formalizzare il legame fra questi due aspetti dei sistemi singolari e indagarne gli effetti sulla dinamica. In particolare, si vedrà come attraverso la classificazione dei vincoli sia possibile stabilire se una data teoria presenti simmetrie di gauge oppure no.

Si supponga che l'algoritmo di consistenza abbia prodotto tutti i vincoli della teoria e che essi siano irriducibili. Le condizioni sui moltiplicatori di Lagrange a questo punto sono trovate imponendo

$$\{\phi_j, H\} = \{\phi_j, H_0\} + \{\phi_j, c^m\}\phi_m + c^m\{\phi_j, \phi_m\} \approx \{\phi_j, H_0\} + c^m\{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \quad (2.1)$$

dove j indicizza l'intero set di J vincoli mentre m solo il set degli M primari. La condizione appena scritta può essere letta, per ogni punto della superficie di vincolo, come un sistema di J equazioni lineari non omogeneo nelle M variabili c^m , che si scriveranno dunque nella forma

$$c^m = v_0^m + v^m \quad (2.2)$$

dove v_0^m è una soluzione particolare del sistema non omogeneo (che si supporrà esistere: in caso contrario le condizioni sui moltiplicatori risulterebbero contraddittorie e la teoria sarebbe inconsistente) mentre v^m è una soluzione qualsiasi del sistema omogeneo associato

$$v^m\{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \quad (2.3)$$

Come è ben noto, v^m può essere scritto come combinazione dei vettori linearmente indipendenti v_α^m che costituiscono il kernel di $\{\phi_j, \phi_m\}$. Il rango di tale matrice si vede subito essere pari al numero di vincoli primari di seconda classe della teoria, e di conseguenza il numero dei v_α^m deve essere pari al numero di vincoli primari di prima classe.

In definitiva, si è ottenuto

$$c^m = \lambda^\alpha v_\alpha^m \quad (2.4)$$

con i λ^α completamente arbitrari, e di conseguenza

$$H = H_0 + v_0^m \phi_m + \lambda^\alpha v_\alpha^m \phi_m = H' + \lambda^\alpha v_\alpha^m \phi_m \quad (2.5)$$

dove si è definita l'*Hamiltoniana di prima classe* come $H' = H_0 + v_0^m \phi_m$. Tale funzione, effettivamente di prima classe per costruzione, non è determinata univocamente ma dipende dalla scelta di v_0^m . Ridefinendo parte dei vincoli attraverso $\gamma_\alpha = v_\alpha^m \phi_m$, si può scrivere l'*Hamiltoniana totale* come

$$H = H' + \lambda^\alpha \gamma_\alpha \quad (2.6)$$

I vincoli γ_α sono di prima classe: infatti da (2.3) si ha

$$0 \approx v^m \{\phi_j, \phi_m\} = \lambda^\alpha v_\alpha^m \{\phi_j, \phi_m\} \approx \lambda^\alpha \{\phi_j, v_\alpha^m \phi_m\} = \lambda^\alpha \{\phi_j, \gamma_\alpha\} \quad (2.7)$$

La procedura appena mostrata non è altro che la determinazione delle condizioni sui moltiplicatori di Lagrange già vista in precedenza, generalizzata però al caso con più moltiplicatori. Come era già stato mostrato, tali condizioni possono non determinarne univocamente la dinamica di tutti i moltiplicatori: l'arbitrarietà residua è contenuta nella totale libertà di scelta dei vettori λ^α . Il legame fra classificazione dei vincoli e indeterminazione dei moltiplicatori di Lagrange, accennato all'inizio del capitolo, è ora manifesto: per ogni vincolo di seconda classe indipendente la matrice $\{\phi_j, \phi_m\}$ aumenta di un'unità il proprio rango, riducendo la libertà nella scelta dei v^m e quindi dei λ^α . Al contrario, ogni vincolo di prima classe aumenta di una dimensione la libertà di scelta delle v^m e quindi delle λ^α . Si noti che anche se le tre funzioni H_0 , H' e H sono uguali on-shell, esse determinano in generale tre dinamiche tra loro distinte delle funzioni dello spazio delle fasi: ciò è dovuto in ultima analisi al fatto che una funzione (in questo caso i vincoli) nulla on-shell può avere parentesi di Poisson non nulle on-shell con un'altra funzione.

2.1.2 Trasformazioni di gauge

Ora, l'arbitrarietà contenuta nella funzione Hamiltoniana si riflette chiaramente in un'arbitrarietà nelle soluzioni delle equazioni di Hamilton del moto: questa caratteristica non va interpretata come un difetto di predittività della teoria ma semplicemente come una sovrabbondanza di variabili matematiche introdotte nel modello rispetto agli effettivi gradi di libertà fisici presenti. Non c'è nulla di inconsistente nel fatto che variabili prive di una diretta interpretazione fisica possano avere evoluzioni temporali non uniche: questa è anzi la caratteristica fondamentale di tutte le teorie di gauge. Le diverse evoluzioni possibili per il sistema devono però essere fisicamente equivalenti. La scelta di una particolare gauge equivale alla scelta arbitraria di una particolare dinamica per i parametri λ^α , che sono completamente liberi: l'evoluzione temporale di una funzione qualsiasi dello spazio delle fasi è allora data da

$$\dot{F}(t) = \{F, H\}(t) = \{F, H'\}(t) + \lambda^\alpha(t) \{F, \gamma_\alpha\}(t) \quad (2.8)$$

dove il secondo termine rappresenta proprio la parte arbitraria della dinamica. Le cosiddette trasformazioni di gauge, a questo punto, sono ottenute integrando la dinamica data da due differenti scelte di gauge λ^α e $\tilde{\lambda}^\alpha$:

$$\Delta F(t) = \int_{\tilde{\lambda}^\alpha} dt \dot{F} - \int_{\lambda^\alpha} dt \dot{F} \quad (2.9)$$

È cruciale per il seguito notare subito che la differenza nelle due evoluzioni temporali non riguarda solo il secondo termine in (2.9). Le due diverse scelte di gauge potrebbero infatti portare in generale a due diverse evoluzioni per il primo termine $\{F, H'\}$, che quindi contribuirebbe a ΔF nell'integrale. Per una discussione più approfondita si rimanda all'esempio esplicito nella trattazione dell'elettromagnetismo (riportato nella sezione degli esempi) e all'appendice (A).

Le quantità fisiche devono essere allora *gauge-invarianti* (o, con una terminologia fisicamente più evocativa, *gauge-osservabili*), ovvero non essere trasformate da simmetrie di gauge (ovvero da cambi nella scelta della dinamica delle λ^α). In altre parole devono commutare con tutti i vincoli di prima classe. Quest'ultimo fatto unito all'identità di Jacobi assicura che le parentesi di Poisson di due quantità gauge-invarianti siano anch'esse gauge-invarianti.

Da un punto di vista lagrangiano, tale arbitrarietà emerge dalla presenza di simmetrie dell'azione parametrizzate in modo dipendente dal tempo: ciò comporta, per il *secondo Teorema di Nöther* ([19],B), che le equazioni del moto non siano tutte indipendenti e che non siano dunque sufficienti a determinare completamente l'evoluzione temporale delle variabili dinamiche.

Nell'approccio hamiltoniano la situazione è ancora più semplice: nelle teorie di gauge non tutti i moltiplicatori di Lagrange sono determinati e una scelta diversa degli stessi corrisponde a una trasformazione di gauge della teoria.

In definitiva, il rapporto fra teorie di gauge e teorie singolari può essere riassunto come segue: tutte le teorie di gauge sono singolari, mentre una teoria singolare è anche di gauge solo se sono presenti vincoli primari di prima classe nell'Hamiltoniana totale.

2.1.3 Parentesi di Dirac

Si è visto come le trasformazioni di gauge siano implementate attraverso le comuni parentesi di Poisson e pertanto incorporate all'interno del flusso hamiltoniano del sistema singolare. I vincoli di prima classe hanno un preciso ruolo nella dinamica e non si può dunque sperare di studiare un sistema singolare risolvendo fin dall'inizio tali vincoli e ponendoli identicamente a zero pur mantenendo una formulazione hamiltoniana della teoria equivalente a quella originale. È lecito a questo punto chiedersi se un procedimento del genere sia però possibile per i vincoli di seconda classe, che non hanno alcun effetto oltre a quello di restringere lo spazio degli stati fisici.

La risposta, positiva, è dovuta a Dirac [4] e si basa su una ridefinizione delle parentesi di Poisson in modo che la superficie definita dai soli vincoli di seconda classe erediti una struttura symplettica non degenerare dallo spazio delle fasi totale. Le *parentesi di Dirac* sono definite per due funzioni dello spazio delle fasi F e G come

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \chi_a\} C^{ab} \{\chi_b, G\} \quad (2.10)$$

dove C^{ab} è la matrice inversa della matrice dei vincoli di seconda classe C_{ab} . Per le parentesi appena definite valgono le seguenti proprietà

$$\{F, G\}^* = -\{G, F\}^* \quad (2.11a)$$

$$\{F, F_{fc}\}^* \approx \{F, F_{fc}\} \quad (2.11b)$$

$$\{F, \chi_a\}^* = 0 \quad (2.11c)$$

$$\{F, \lambda G\}^* = \lambda \{F, G\}^* \quad (2.11d)$$

$$\{F_1, F_2 F_3\}^* = F_2 \{F_1, F_3\}^* + \{F_1, F_2\}^* F_3 \quad (2.11e)$$

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\}^* + \{F_2, \{F_3, F_1\}\}^* + \{F_3, \{F_1, F_2\}\}^* = 0 \quad (2.11f)$$

dove F, G, F_1, F_2, F_3 sono funzioni qualsiasi dello spazio delle fasi, F_{fc} è una funzione di prima classe qualsiasi dello spazio delle fasi, χ_a è un vincolo di seconda classe e λ è una costante. Dato che la proprietà (2.11c) è la più importante e quella che rende le parentesi di Dirac interessanti per sistemi in cui siano presenti vincoli di seconda classe, sarà l'unica a essere dimostrata qui:

$$\begin{aligned} \{F, \chi_a\}^* &= \{F, \chi_a\} - \{F, \chi_b\} C^{cb} \{\chi_c, \chi_a\} \\ &= \{F, \chi_a\} - \{F, \chi_b\} C^{cb} C_{ba} \\ &= \{F, \chi_a\} - \{F, \chi_b\} \delta_a^b \\ &= \{F, \chi_a\} - \{F, \chi_a\} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

In ogni caso, tutte le altre proprietà si dimostrano banalmente (sfruttando le ben note proprietà delle parentesi di Poisson e l'antisimmetria di C^{ab}) ad eccezione della (2.11f), per la quale si veda [6].

Dato che l'Hamiltoniana totale è una funzione di prima classe, per la proprietà (2.11b) l'evoluzione temporale determinata dalle due diverse parentesi coincide on-shell (mentre differisce in generale off-shell). Come è stato anticipato, la caratteristica più interessante delle parentesi di Dirac è quella di trattare come oggetti identicamente nulli i vincoli di seconda classe. Sostituendo le parentesi appena definite alle usuali parentesi di Poisson e restringendo l'attenzione ai soli stati soddisfacenti i vincoli di seconda classe, si ottiene effettivamente un sistema hamiltoniano dotato di una struttura symplettica equivalente on-shell alla precedente, ma definito su uno spazio delle fasi di dimensione inferiore a quello di partenza e in cui sono rimasti solo vincoli di prima classe.

Le parentesi di Dirac permettono quindi una vera e propria restrizione del problema a un sotto-spazio dello spazio delle fasi totale. In effetti, si dimostra [6] che tali parentesi (che come si può notare

sono definite su tutto lo spazio delle fasi) una volta ristrette al sottospazio in questione coincidano con quelle di Poisson ottenute a partire da un qualsiasi sistema di coordinate canoniche introdotto su tale superficie. Un'idea intuitiva della dimostrazione è basata sulla possibilità di ridurre la matrice dei vincoli di seconda classe nella forma dell'unità simplettica: come già discusso in precedenza, ciò fa pensare che i χ_a costituiscano, almeno localmente, un set di variabili canoniche coniugate a due a due. Completando questo set con un sistema di coordinate y^i sulla superficie considerata, le parentesi di Poisson nelle nuove variabili (chiamate collettivamente \tilde{w}^μ) diventano

$$\begin{aligned}\{F, G\} &= \frac{\partial F}{\partial \tilde{w}^\mu} \{\tilde{w}^\mu, \tilde{w}^\nu\} \frac{\partial G}{\partial \tilde{w}^\nu} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y^i} \{y^i, y^j\} \frac{\partial G}{\partial y^j} + \frac{\partial F}{\partial \chi_a} \{\chi_a, \chi_b\} \frac{\partial G}{\partial \chi_b} + \frac{\partial F}{\partial y^i} \{y^i, \chi_b\} \frac{\partial G}{\partial \chi_b} + \frac{\partial F}{\partial \chi_a} \{\chi_a, y^j\} \frac{\partial G}{\partial y^j} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y^i} \{y^i, y^j\} \frac{\partial G}{\partial y^j} + \frac{\partial F}{\partial \chi_a} \{\chi_a, \chi_b\} \frac{\partial G}{\partial \chi_b} = \frac{\partial F}{\partial y^i} \{y^i, y^j\} \frac{\partial G}{\partial y^j} + \frac{\partial F}{\partial \chi_a} C_{ab} \frac{\partial G}{\partial \chi_b}\end{aligned}\quad (2.13)$$

dove la penultima uguaglianza è giustificata dal fatto che le variabili χ_a formano coppie di variabili coniugate e devono avere perciò parentesi nulle con le altre variabili canoniche. Ora si ha, in questo set di variabili

$$\{F, \chi_a\} C^{ab} \{\chi_b, G\} = \frac{\partial F}{\partial \chi_c} C_{cd} \frac{\partial \chi_a}{\partial \chi_d} C^{ab} \frac{\partial \chi_b}{\partial \chi_e} C_{ef} \frac{\partial G}{\partial \chi_f} = \frac{\partial F}{\partial \chi_c} C_{cd} \delta_a^d C^{ab} \delta_b^e C_{ef} \frac{\partial G}{\partial \chi_f} = \frac{\partial F}{\partial \chi_c} C_{cf} \frac{\partial G}{\partial \chi_f} \quad (2.14)$$

da cui infine si vede che

$$\{F, G\}^* = \frac{\partial F}{\partial y^i} \{y^i, y^j\} \frac{\partial G}{\partial y^j} \quad (2.15)$$

come anticipato. Una verifica particolarmente evidente ed esplicativa del fatto appena discusso può essere trovata nella sezione degli esempi.

2.1.4 Gauge-fixing

Appurato che la presenza di vincoli di prima classe comporti una parziale arbitarietà nell'evoluzione temporale delle variabili del modello e quindi la necessità di scegliere una fra le infinite possibili dinamiche fisicamente equivalenti in modo da riottenere anche a livello matematico il determinismo richiesto da una teoria classica, si pone ora il problema di come formalizzare questa scelta.

La procedura matematica da seguire per ottenere tale risultato è detta *gauge-fixing*, e consiste di fatto nell'introduzione di nuovi vincoli soddisfacenti certe condizioni. In particolare, essi devono essere *ammissibili*, ovvero deve sempre esistere una particolare trasformazione di gauge che porti a soddisfare tali vincoli a partire da uno stato fisico qualunque; devono poi essere *sufficienti*, ovvero devono eliminare completamente l'arbitarietà dalla dinamica del sistema (ovvero la trasformazione di gauge di cui prima deve essere unica). In particolare, nell'ambito del formalismo appena sviluppato, è chiaro che per soddisfare quest'ultima condizione i nuovi vincoli introdotti dovranno portare a una situazione in cui non siano più presenti vincoli primari di prima classe e i moltiplicatori di lagrange risultino così completamente determinati. Introdurre questi nuovi vincoli corrisponde infatti a scegliere una particolare dinamica per i moltiplicatori.

È ora necessario chiarire in che senso questi nuovi vincoli sono imposti. Essi non sorgono né da ragioni geometriche come i vincoli primari, né da ragioni di consistenza come quelli secondari. Essendo frutto di una scelta arbitraria, essi vanno intesi come ottenuti attraverso una particolare trasformazione di gauge, che porti dalla gauge di partenza a quella soddisfacente le condizioni scelte. Una volta effettuata la trasformazione, l'evoluzione temporale dei moltiplicatori e quindi quella di qualsivoglia funzione dello spazio delle fasi è determinata. In generale, però, la trasformazione che porta a soddisfare i nuovi vincoli imposti non è unica, e a scelte diverse corrispondono diversi valori delle variabili dinamiche all'istante finale della trasformazione. Oltre ai vincoli di gauge-fixing (che devono essere soddisfatti per tutti i tempi), allora, vanno imposte ulteriori condizioni all'istante iniziale del moto (ovvero non appena ci si è ricondotti alla gauge voluta). Da questo punto in poi il sistema evolve in modo deterministico.

Si può dimostrare che il numero delle condizioni ulteriori a tempo fissato da scegliere è pari a quello dei vincoli secondari di prima classe. Esse, in combinazione con le equazioni del moto, contribuiscono a ridurre ancora la dimensione dello spazio delle fasi. Coerentemente con lo spirito della presente tesi, invece di dimostrare rigorosamente le precedenti affermazioni, verranno mostrati esempi espliciti per rendere più chiari i concetti introdotti. Per questo si rimanda all'apposita sezione a fine capitolo.

In definitiva, ad ogni vincolo di prima classe (primario o secondario) corrisponde una diminuzione di 2 dimensioni dello spazio delle fasi. I vincoli di seconda classe invece non necessitano dell'imposizione di ulteriori condizioni e dunque riducono la dimensione totale dello spazio delle fasi di una sola unità. Dato che a ogni coppia di variabili coniugate corrisponde un grado di libertà fisico, si ha che

$$2(\# \text{gradi di libertà fisici}) = (\# \text{variabili totali}) - 2(\# \text{vincoli di prima classe}) - (\# \text{vincoli di seconda classe}) \quad (2.16)$$

Il fatto che il numero di gradi di libertà fisici sia sempre un numero intero è assicurato dal fatto che sia le variabili totali che i vincoli di seconda classe si presentino sempre in numero pari.

Ultimata la procedura di gauge-fixing e imposti i vincoli, ci si ritrova dunque con un sistema deterministico in cui i gradi di libertà matematici sono in corrispondenza biunivoca con quelli fisici. Nel modello così ottenuto ogni oggetto matematico ha un preciso ruolo fisico, anche se le quantità effettivamente misurabili potrebbero essere solo particolari funzioni di tali variabili (come nel caso dell'elettromagnetismo). A questo punto si può ad esempio ricorrere alle parentesi di Dirac e ottenere una formulazione hamiltoniana non singolare per il sistema.

Riepilogando, una possibile soluzione al problema della ridondanza tipica dei sistemi di gauge è quella di

- 1 effettuare la procedura di gauge-fixing, scegliendo arbitrariamente nuovi vincoli che soddisfino le condizioni discusse poc'anzi;
- 2 effettuare il passaggio alle parentesi di Dirac;
- 3 trovare una parametrizzazione esplicita della superficie di vincolo (il set di coordinate precedentemente chiamate y^i).

Occorre infine menzionare per completezza che non sempre la procedura di gauge-fixing è globalmente realizzabile: in tal caso non esiste un unico set di vincoli (e quindi di variabili) utilizzabile su tutto lo spazio delle fasi. Il problema, di natura topologica, è noto come *ambiguità di Gribov*.

2.1.5 Conversione dei vincoli

Si è appena visto come una corretta procedura di gauge-fixing porti a un sistema in cui tutti i vincoli sono diventati di seconda classe. A questo punto è naturale chiedersi se esista anche una procedura inversa che porti a convertire vincoli di seconda classe in vincoli di prima classe e faccia quindi guadagnare nuove simmetrie di gauge al sistema. Il problema appena posto può generalmente essere risolto introducendo nel modello nuove variabili ridondanti (non avendo alcun significato fisico, tali gradi di libertà sono detti di *pure-gauge*) in modo che esse possano poi essere nuovamente eliminate tramite gauge-fixing. In questa tesi non verrà cercata una soluzione generale al problema, peraltro già largamente studiato in letteratura (si veda ad esempio [8]), ma verrà applicata una procedura di *conversione dei vincoli* a qualche sistema particolare.

I vantaggi di questa procedura, che potrebbe sembrare controproducente a livello classico, diventano importanti nella quantizzazione di sistemi con vincoli di seconda classe: il solo fatto di evitare l'impiego delle parentesi di Dirac, che possono portare a difficoltà computazionali notevoli o ad ambiguità nel passaggio alla trattazione quantistica (si veda per questo il prossimo capitolo), è già sufficiente per prenderla in considerazione. È però importante far notare fin da ora che la procedura di conversione dei vincoli non è in generale unica, anche se deve portare a risultati fisicamente equivalenti.

2.2 Simmetria BRST

2.2.1 Caratteristiche generali

Una risposta diversa al problema di ricavare le grandezze fisicamente interessanti all'interno di una teoria di gauge è data dalla costruzione *BRST*. L'idea fondamentale è quella di allargare ulteriormente lo spazio delle fasi (che verrà detto *spazio delle fasi esteso*) in modo da guadagnare una nuova simmetria, detta appunto *simmetria BRST*, implementata attraverso un operatore differenziale δ che agisca sulle funzioni del nuovo set di variabili. Si indicherà con δ sia la simmetria stessa che l'operatore associato. La caratteristica più importante di questa nuova simmetria, che la distingue dalle normali simmetrie di gauge, è la nilpotenza:

$$\delta^2 = 0 \quad (2.17)$$

Un oggetto di questo tipo definisce un'algebra differenziale. Per costruzione, un qualsiasi oggetto nell'immagine di δ appartiene anche al kernel del medesimo operatore. A questo punto è allora naturale suddividere gli oggetti annullati da δ in due classi: quelli che si possono ottenere applicando questa trasformazione a qualcos'altro (e vengono quindi annullati *trivialmente* per nilpotenza) e tutti gli altri. Questi ultimi stati formano la coomologia di δ .

Come si è appena visto, passare alla coomologia di un'algebra differenziale implica effettuare una doppia restrizione dello spazio su cui si lavora: la prima consiste nel passaggio agli elementi del kernel dell'operatore considerato (detti δ -*chiusi*), la seconda nell'eliminazione degli oggetti che vengono annullati da δ in maniera triviale (detti δ -*esatti*). Si consideri ad esempio un elemento dello spazio considerato che venga mappato dalla trasformazione in un'altro elemento non banale dello stesso spazio: entrambi verranno eliminate nel passaggio alla coomologia, il primo perché non chiuso, il secondo perché esatto.

Questa breve discussione informale dovrebbe far capire perché sia una buona idea introdurre nuove variabili le cui immagini attraverso δ siano proprio quei gradi di libertà non fisici che si vogliono eliminare dalla teoria. In questo modo le nuove variabili saranno eliminate a livello coomologico poiché non chiuse, mentre quelle preesistenti verranno eliminate poiché esatte.

Resta da capire quali siano le giuste variabili da introdurre nella teoria. Per garantire la nilpotenza di δ è necessario ricorrere a coppie coniugate di *variabili fermioniche* anticommutanti (α^r, a_r) , dette rispettivamente *ghost* e *momenti ghost* e contrapposte alle usuali *variabili bosoniche* commutanti. Dalla definizione delle parentesi di Poisson generalizzate si vede già che vale

$$\{\alpha^r, a_s\} = \{a_s, \alpha^r\} = -\delta_s^r \quad (2.18)$$

La prima conseguenza dell'anticommutatività delle variabili fermioniche è quella di annullamento dei rispettivi quadrati (dovrebbe essere chiaro ora il loro legame con la nilpotenza di δ). Inoltre, è immediato verificare che il prodotto di un numero pari di variabili fermioniche torni ad essere un oggetto commutante. Ha allora senso definire la *parità* di una funzione f : essa è uguale a 0 o 1 a seconda che la funzione sia commutante o anticommutante rispettivamente e verrà indicata con $\epsilon(f) = \epsilon_f$. Nel seguito verranno considerate solo funzioni di parità definita.

Un altro sistema di classificazione delle funzioni dello spazio delle fasi esteso è dato dal *ghost number*. Convenzionalmente si pone

$$gh(\alpha^r) = 1 \quad gh(a_r) = -1 \quad (2.19)$$

Per una funzione generica il ghost number è definito a partire dal suo sviluppo in serie di potenze dei ghost e dei ghost momenta, tenendo conto che

$$gh(FG) = gh(F) + gh(G) \quad (2.20)$$

Anche in questo caso, verranno considerate solo funzioni di ghost number definito.

Questo numero può essere esteso agli operatori che agiscono sulle funzioni dello spazio delle fasi esteso: un operatore \mathcal{O} ha ghost number definito e pari a g se

$$gh(\mathcal{O}F) - gh(F) = g \quad \forall F \quad (2.21)$$

Ad esempio, l'operatore δ ha ghost number pari a 1.

Date queste definizioni, il prossimo passo è quello di definire una struttura simplettica sullo spazio delle fasi esteso. Prima di tutto bisogna definire delle derivazioni nelle variabili fermioniche. Formalmente, ciò viene risolto come segue: la funzione $\frac{\partial F}{\partial \alpha^r}$ è ottenuta portando α^r (applicando le opportune regole di commutazione) a sinistra dello sviluppo in serie di F , e quindi rimuovendola dall'espressione. Allo stesso modo si definisce $\frac{\partial F}{\partial a_r}$. Si vede subito che

$$gh(\frac{\partial}{\partial \alpha^r}) = -1 \quad gh(\frac{\partial}{\partial a_r}) = 1 \quad (2.22)$$

Si possono ora definire le *parentesi di Poisson generalizzate* date da

$$\{F, G\}_{gen} = \left[\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \right] + (-1)^{\epsilon_F} \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha^r} \frac{\partial G}{\partial a_r} + \frac{\partial F}{\partial a_r} \frac{\partial G}{\partial \alpha^r} \right] \quad (2.23)$$

Coincidendo sullo spazio delle fasi originale con le comuni parentesi di Poisson, d'ora in avanti saranno usate sempre le (2.23), omettendo il pedice.

Infine, si dimostrano [6] valere le seguenti proprietà

$$\{F, G\} = -(-1)^{\epsilon_F \epsilon_G} \{G, F\} \quad (2.24a)$$

$$\{F, G_1 G_2\} = \{F, G_1\} G_2 + (-1)^{\epsilon_F \epsilon_{G_1}} G_1 \{F, G_2\} \quad (2.24b)$$

$$\epsilon_{\{F, G\}} = \epsilon_F + \epsilon_G \quad (2.24c)$$

$$\{\{F_1, F_2\}, F_3\} + (-1)^{\epsilon_{F_1}(\epsilon_{F_2} + \epsilon_{F_3})} \{\{F_2, F_3\}, F_1\} + (-1)^{\epsilon_{F_3}(\epsilon_{F_1} + \epsilon_{F_2})} \{\{F_3, F_1\}, F_2\} = 0 \quad (2.24d)$$

2.2.2 Simmetria BRST e simmetrie di gauge

Si supponga ora di avere una teoria con solo vincoli di prima classe. Ciò può essere ottenuto in principio grazie alla procedura di conversione dei vincoli. Anche certi casi con presenza di vincoli di seconda classe risultano trattabili, ma la formulazione della teoria BRST è la più generale possibile in questo contesto, che sarà quindi l'unico considerato nel seguito.

Si vuole ora trovare la giusta definizione dell'operatore δ , in modo che esso sia in grado di identificare le gauge-osservabili della teoria. Da un punto di vista più formale, si vuole che la coomologia definita da δ sia in un qualche senso equivalente all'algebra delle funzioni gauge-invarianti dello spazio delle fasi esteso.

Il fatto, non ovvio, che sia sempre possibile definire un tale operatore richiede una trattazione rigorosa che esula dagli scopi della presente tesi e che è invece oggetto di diversi testi specializzati (ad esempio [6]). Due risultati che è invece necessario riportare (senza dimostrazione) sono i seguenti:

- 1 le funzioni gauge-osservabili sono in biezione con il gruppo di coomologia dell'operatore δ di ghost number nullo;
- 2 Esiste sempre, nello spazio delle fasi esteso, una funzione Ω di ghost number pari a 1 e detta *carica BRST* esteso tale che

$$\delta F = \{F, \Omega\} \quad \forall F \quad (2.25)$$

Indicando con $H^k(\delta)$ il gruppo di coomologia di ghost number k di δ , i due risultati precedenti possono essere riassunti (con un piccolo abuso di notazione) come segue

$$\{f \text{ funzioni gauge-invarianti}\} \leftrightarrow H^0(\cdot, \Omega) \quad (2.26)$$

È ovvio a questo punto che possedere l'espressione esplicita di Ω fornisca un'informazione importantissima all'interno della costruzione BRST. In generale, i vari termini dello sviluppo in serie

di potenze delle variabili fermioniche di Ω possono essere trovati in modo ricorsivo imponendo la nilpotenza della simmetria. L'espressione finale sarà data da

$$\Omega = \sum_{p \geq 0} \Omega^{(p)} \quad (2.27)$$

dove il termine $\Omega^{(p)}$ contiene $p + 1$ ghost e p momenti ghost moltiplicati tra loro. La sua espressione diventa però molto più semplice sotto certe ipotesi sulle relazioni di commutazione dei vincoli γ_r . In particolare, se i vincoli di prima classe commutano su tutto lo spazio delle fasi e non solo on-shell, grazie alla nilpotenza delle variabili fermioniche la carica BRST diventa semplicemente

$$\Omega = \Omega^{(0)} = \alpha^r \gamma_r \quad (2.28)$$

Se i vincoli presentassero commutatore non nullo off-shell sarebbero necessari ulteriori termini in (2.28) per assicurare la nilpotenza di Ω : la simmetria δ non lascierebbe invariati i ghost α^r e si parlerebbe di *teorie di gauge non abeliane*. Nel primo caso (chiamato all'opposto *abeliano*) rientrano comunque molte teorie fisiche interessanti; in ogni caso vi rientrano tutte le applicazioni proposte nella tesi e non verranno dunque prese in considerazione ulteriori estensioni della teoria.

Vale la pena infine notare che la nilpotenza di δ in termini di Ω diventa

$$\{\Omega, \Omega\} = 0 \quad (2.29)$$

L'espressione appena scritta non è banale poiché le parentesi di Poisson generalizzate per funzioni anticommutanti sono simmetriche e non antisimmetriche.

È necessario ora stabilire più precisamente quale sia la relazione fra le funzioni gauge-osservabili dello spazio delle fasi originario e le funzioni *BRST-osservabili*, ovvero gli elementi non banali della coomologia di δ e di ghost number nullo. Si consideri una quantità gauge-osservabile $A^{(0)}$. Si dimostra [6] che esiste sempre una quantità BRST-osservabile tale che

$$A = \sum_{p \geq 0} A^{(p)} \quad gh(A) = 0 \quad (2.30)$$

dove il termine $A^{(p)}$ contiene p ghost e momenti ghost moltiplicati tra loro. Viceversa, data la quantità BRST-osservabile A con sviluppo dato da (2.30), la quantità fisica gauge-osservabile associata è $A^{(0)}$, ovvero il termine indipendente dai ghost. Si è così stabilita esplicitamente la relazione fra $H^0(\delta)$ e le funzioni gauge-osservabili: queste ultime si ottengono proiettando il corrispondente BRST-osservabile sullo spazio delle fasi originale.

Si noti inoltre che, grazie all'*identità di Jacobi generalizzata* (2.24d), se A e B sono BRST-osservabili di ghost number nullo, allora lo è anche $\{A, B\}$, che ammetterà dunque uno sviluppo analogo a (2.30):

$$\{A, B\} = \sum_{p \geq 0} \{A, B\}^{(p)} \quad (2.31)$$

È inoltre immediato convincersi che

$$\{A, B\}^{(0)} = \{A^{(0)}, B^{(0)}\} \quad (2.32)$$

In particolare, l'Hamiltoniana totale ammette un'estensione BRST-invariante, che verrà d'ora in avanti denotata semplicemente come H (mentre l'Hamiltoniana totale solita si indicherà con $H^{(0)}$). La dinamica nello spazio delle fasi esteso è data allora da

$$\dot{A} = \{A, H\} \quad (2.33)$$

Grazie a (2.32), si vede che

$$\dot{A}^{(0)} = \{A^{(0)}, H^{(0)}\} \quad (2.34)$$

e dunque sullo spazio delle fasi originario l'evoluzione prevista da (2.33) e dalle solite equazioni di Hamilton coincide. Inoltre per l'identità di Jacobi generalizzata una funzione BRST-invariante rimane tale nel tempo:

$$\begin{aligned} \{\{A, H\}, \Omega\} + (-1)^{\epsilon_A(\epsilon_H + \epsilon_\Omega)} \{\{H, \Omega\}, A\} + (-1)^{\epsilon_\Omega(\epsilon_A + \epsilon_H)} \{\{\Omega, A\}, H\} &= 0 \\ \{\{A, H\}, \Omega\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ovviamente se così non fosse la teoria sviluppata finora non sarebbe consistente.

In ultimo, occorre notare come tutte le quantità definite finora siano determinate a meno di termini δ -esatti. In particolare, per consistenza la dinamica deve rimanere fisicamente equivalente se ad H si sostituisce la funzione $H + \{K, \Omega\}$, con $gh(K) = -1$. Ciò è vero poiché se A è BRST-invariante allora per identità di Jacobi generalizzata (analogamente a quanto succede in (2.35)) si trova che così facendo la dinamica viene modificata di un termine δ -esatto, che non è però gauge-invariante. La scelta di un *fermione di gauge-fixing* K equivale in questo formalismo a una scelta di vincoli di gauge-fixing nello spazio delle fasi originale e quindi a una particolare dinamica per il sistema.

2.3 Esempi

2.3.1 La particella libera

Si consideri l'esempio della particella libera relativistica già trattata nel formalismo dell'azione equivalente come esempio di sistema singolare nel capitolo precedente. Si era già visto come la teoria presentasse solo vincoli di prima classe. Non sorprendentemente, la particella libera relativistica è allora una teoria di gauge, e in particolare è un esempio in cui una descrizione ridondante è necessaria per implementare la covarianza manifesta della dinamica. Le simmetrie di gauge dell'azione sono date dalle riparametrizzazioni

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau} \quad x^\mu(\tau) \rightarrow x^\mu(\tilde{\tau}) \quad e(\tau) \rightarrow \left(\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}}\right)^{-1} e(\tilde{\tau}) \quad (2.36)$$

A livello hamiltoniano le trasformazioni di gauge sono invece date da una particolare scelta della dinamica del moltiplicatore u . Dato che

$$\dot{e} = \{e, H\} = u \quad (2.37)$$

l'evoluzione di e come variabile dinamica risulta di fatto totalmente dipendente dalla scelta di gauge effettuata su u e quindi completamente arbitraria. Ciò non sorprende poiché il ruolo originario di e era proprio quello di un moltiplicatore di Lagrange e trattarlo come una vera variabile dinamica è stato in qualche modo un escamotage formale per ottenere i vincoli corretti. Questo fatto risulta ancora più trasparente passando alla trattazione semplificata in cui è direttamente e ad essere il moltiplicatore libero all'interno dell'Hamiltoniana. In questo caso si sceglie direttamente una dinamica per e invece di farlo indirettamente attraverso u , e il risultato sulle variabili dinamiche interessanti (posizioni e momenti) è assolutamente identico. Per quanto riguarda i momenti, essi sono chiaramente gauge-invarianti (e hanno dinamica banale); per le posizioni, invece, si vede che tutta la dinamica è rappresentata dal flusso generato dal vincolo:

$$\dot{x}^\mu = \{x^\mu, \frac{e}{2}(p^2 + 1)\} = \{x^\mu, H\} = ep^\mu \quad (2.38)$$

Ciò era già ovvio dal momento che l'Hamiltoniana consiste unicamente nel vincolo e nel relativo moltiplicatore. Come è già stato detto, questo fatto è dovuto alla libertà nella scelta della parametrizzazione della world-line, da cui dipende la legge oraria della particella.

Da un punto di vista più geometrico, cambiare liberamente parametrizzazione permette di variare a piacere la norma del vettore tangente alla world-line della particella nello spazio-tempo di Minkowski

(perché a parametrizzazioni diverse corrispondono velocità diverse), mentre non ne intacca minimamente la direzione dal momento che i rapporti fra le derivate delle diverse coordinate sono indipendenti da e , come è ovvio da (2.38).

Ora, per liberarsi da questa arbitrarietà la prima possibilità è quella di eseguire il gauge-fixing, che in questo caso ha l'immediata interpretazione di una scelta particolare di parametrizzazione della world-line. Ponendo il vincolo

$$e = 1 \quad (2.39)$$

che rende il vincolo primario di seconda classe e impone $u \approx 0$, si ottiene

$$\dot{x}^2 = e^2 p^2 \approx -1 \quad (2.40)$$

È evidente che il parametro scelto è allora il parametro d'arco, che verrà detto *tempo proprio* e denotato con s . Confrontando (2.39) con (2.36) si vede che è ancora possibile ridefinire il parametro tramite una traslazione per una costante: occorre specificare un'ulteriore condizione, che solitamente è presa essere

$$x^0(s=0) = 0 \quad (2.41)$$

Questo semplice esempio permette di capire come avviene la riduzione della dimensione dello spazio delle fasi da parte dei vincoli di prima classe. Infatti, la condizione (2.39) elimina dalla dinamica eventuali trasformazioni di gauge, ma non dà alcuna informazione sulle condizioni iniziali. Esse vanno completate ad esempio attraverso (2.41), che non è un vincolo secondo la definizione adottata finora, ma permette comunque l'eliminazione di una variabile dinamica tramite l'utilizzo delle equazioni del moto:

$$x^0(s) = \int_0^s d\tilde{s} \dot{x}^0(\tilde{s}) = \int_0^s d\tilde{s} \sqrt{1 + \dot{x}^i(\tilde{s})\dot{x}_i(\tilde{s})} \approx \int_0^s d\tilde{s} \sqrt{1 + p^i(\tilde{s})p_i(\tilde{s})} \quad (2.42)$$

Solo le x^i rimangono allora variabili dinamiche per cui risolvere le equazioni del moto. Si sono isolati esplicitamente i tre gradi di libertà della teoria, perdendo però così la proprietà di Lorentz-invarianza manifesta. Le equazioni del moto sono estremamente semplici:

$$\dot{x}^\mu = p^\mu \quad \dot{p}_\mu = 0 \quad (2.43)$$

Volendo implementare la costruzione BRST, in questo caso la carica si scrive molto facilmente in funzione dei ghost α e β come

$$\Omega = \alpha p_e + \frac{\beta}{2} (p^2 + 1) \quad (2.44)$$

L'Hamiltoniana scritta come in (1.47) non è BRST invariante: infatti

$$\{H^{(0)}, \Omega\} = \frac{\alpha}{2} (p^2 + 1) \quad (2.45)$$

Una possibile estensione di ghost number nullo è

$$H = \frac{e}{2} (p^2 + 1) + up_e + \alpha b \quad (2.46)$$

dove a (che non compare in H) e b sono i momenti ghost coniugati rispettivamente a α e β . Infatti una verifica immediata porge

$$\{H, \Omega\} = \{H^{(0)}, \Omega\} + \{\alpha b, \Omega\} = \frac{\alpha}{2} (p^2 + 1) - \frac{\alpha}{2} (p^2 + 1) = 0 \quad (2.47)$$

L'annullamento dell'Hamiltoniana visto in precedenza ha un'ovvia corrispondenza a livello coomologico: infatti l'estensione BRST-invariante dell'Hamiltoniana scritta in (2.46) è δ -esatta:

$$H = -\{eb + au, \Omega\} \quad (2.48)$$

e porre quindi

$$H = 0 \quad (2.49)$$

non può cambiare a livello coomologico la dinamica delle quantità fisiche. L'annullamento on-shell di H corrisponde in questo formalismo al suo annullamento a livello coomologico. Questo semplice esempio è particolarmente utile a comprendere una caratteristica fondamentale di tutto il formalismo BRST, che in ultima analisi ne rappresenta tutto lo spirito: le proprietà che prima erano vere on-shell, ora sono vere in senso coomologico. Un'altra scelta possibile e ugualmente valida è

$$H = -\{(e-1)b + au, \Omega\} = \frac{1}{2}(p^2 + 1) \quad (2.50)$$

che corrisponde alla scelta del parametro d'arco s nel formalismo abituale.

Adottando fin dal principio l'approccio semplificato in cui e torna ad essere un moltiplicatore di lagrange del sistema si ottiene

$$\Omega = \frac{\beta}{2}(p^2 + 1) \quad H = \frac{e}{2}(p^2 + 1) = -\{eb, \Omega\} \quad (2.51)$$

Come si vede, il risultato è analogo e non influenza nessuna delle variabili significative.

2.3.2 Il rotore come teoria di gauge

Alla luce della teoria elaborata finora, è ovvio che il rotore 3D presentato nel primo capitolo non rientra nella classe delle teorie di gauge. Ciò è coerente con l'intuizione che tutte le variabili (al netto dei vincoli) che compaiono nell'Hamiltoniana (1.51) abbiano un significato fisico diretto.

Come già discusso, da un punto di vista classico la soluzione più semplice del sistema in esame passa per l'introduzione di un sistema di coordinate generalizzate sulla sfera e sulla definizione delle corrispondenti funzioni Lagrangiana e Hamiltoniana. Procedendo in questo modo le equazioni del moto diventano di immediata interpretazione e di facile studio.

Questo sistema, proprio per la sua semplicità, verrà invece utilizzato come esempio di applicazione di due concetti precedentemente sviluppati per teorie con vincoli di seconda classe: le parentesi di Dirac e la conversione dei vincoli.

Ricordando la matrice dei vincoli (1.55), il calcolo delle parentesi di Dirac procede come segue:

$$\begin{aligned} \{F, G\}^* &= \{F, G\} + \{F, \sqrt{x^2}\} \left\{ \frac{p_i x^i}{\sqrt{x^2}}, G \right\} - \left\{ F, \frac{p_i x^i}{\sqrt{x^2}} \right\} \{ \sqrt{x^2}, G \} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x^i} - \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{x_i}{\sqrt{x^2}} \right] \left[p_j \frac{\delta_k^j x^2 - x^j x_k}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{x^k}{\sqrt{x^2}} \frac{\partial G}{\partial x^k} \right] - \\ &- \left[\frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{x^k}{\sqrt{x^2}} - \frac{\partial F}{\partial p_k} p_j \frac{\delta_k^j x^2 - x^j x_k}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \left[\frac{x_i}{\sqrt{x^2}} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right] = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{x_i x^k}{x^2} \frac{\partial G}{\partial x^k} - \frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{x^k x_i}{x^2} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \\ &- \frac{\partial F}{\partial p_i} x_i \frac{p_k x^2 - p_j x^j x_k}{(x^2)^2} \frac{\partial G}{\partial p_k} + \frac{\partial F}{\partial p_k} x_i \frac{p_k x^2 - p_j x^j x_k}{(x^2)^2} \frac{\partial G}{\partial p_i} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x^k} \left[\delta_i^k - \frac{x^k x_i}{x^2} \right] \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \left[\delta_i^k - \frac{x^k x_i}{x^2} \right] \frac{\partial G}{\partial x^k} - \\ &- \frac{\partial F}{\partial p_i} x_i \frac{p_k x^2 - p_j x^j x_k}{(x^2)^2} \frac{\partial G}{\partial p_k} + \frac{\partial F}{\partial p_k} x_i \frac{p_k x^2 - p_j x^j x_k}{(x^2)^2} \frac{\partial G}{\partial p_i} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Si verifica con un po' di pazienza che

$$\{F, \sqrt{x^2}\}^* = \left\{ F, \frac{p_i x^i}{\sqrt{x^2}} \right\}^* = 0 \quad \forall F \quad (2.53a)$$

$$\{x^i, x^j\}^* = 0 \quad (2.53b)$$

$$\{p_i, p_j\}^* = \frac{p_i x_j - p_j x_i}{x^2} \quad (2.53c)$$

$$\{x^i, p_j\}^* = \delta_j^i - \frac{x^i x_j}{x^2} \quad (2.53d)$$

Le ultime tre relazioni scritte sono dette *parentesi di Dirac fondamentali*.

In queste coordinate il significato geometrico delle parentesi di Dirac non è però particolarmente trasparente. Ci si aspetta che la descrizione di questo problema sia la più naturale possibile in coordinate sferiche. Una possibilità è riscrivere l'ultima espressione in (2.52) in queste coordinate; equivalentemente (e più semplicemente in questo caso) si possono calcolare le parentesi di Dirac direttamente in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \{F, G\}^* &= \{F, G\} + \{F, r\}\{p_r, G\} - \{F, p_r\}\{r, G\} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial p_r} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial p_\theta} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial G}{\partial r} - \\ &\quad - \frac{\partial F}{\partial p_\theta} \frac{\partial G}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial p_\varphi} \frac{\partial G}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial p_r} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial p_\theta} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial F}{\partial p_\theta} \frac{\partial G}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial p_\varphi} \frac{\partial G}{\partial \varphi} = \\ &= \{F, G\}_{|\theta, \varphi} \end{aligned} \quad (2.54)$$

dove con $\{F, G\}_{|\theta, \varphi}$ si sono indicate le normali parentesi di Dirac compute solo rispetto alle variabili angolari. Il calcolo appena mostrato è una verifica esplicita del fatto che le parentesi di Dirac corrispondono alle parentesi di Poisson ristrette alla superficie di vincolo (in questo caso $r = \text{costante}$).

È difficile immaginare un sistema fisico più semplice della particella non relativistica vincolata a muoversi su una sfera. Eppure, già in questo caso il calcolo delle parentesi di Dirac (e delle relative parentesi fondamentali) richiede un certo sforzo, e non è difficile immaginare come questa difficoltà sia destinata ad aumentare rapidamente con la complessità del sistema. Trovare il sistema di coordinate corretto per la descrizione del sistema, poi, può risultare impossibile nella pratica.

Un'alternativa, come anticipato, può essere la conversione dei vincoli. In questo caso la difficoltà sta nel trovare il modo più semplice di effettuare questa conversione, fermo restando che essa non sarà l'unica possibile. Prima di tutto occorre modificare i vincoli in modo da renderli commutanti. In questo caso una scelta immediata è

$$r - R \approx 0 \rightarrow r - R - X \approx 0 \quad (2.55a)$$

$$p_r \approx 0 \rightarrow p_r + P \approx 0 \quad (2.55b)$$

dove (X, P) sono variabili coniugate che costituiscono un grado di libertà di pure gauge. La modifica apportata è consistente poiché per

$$X = 0 \quad P = 0 \quad (2.56)$$

i nuovi vincoli si riducono a quelli originari. La difficoltà ora è trovare una Lagrangiana che si riduca a (1.56) una volta imposto (2.56) e che produca (2.55a) e (2.55b) come vincoli primario e secondario rispettivamente. Si verifica facilmente che una scelta possibile è

$$L = \frac{1}{2} \left[\dot{r}^2 - \dot{X}^2 + (r - X)^2 \dot{\theta}^2 + (r - X)^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right] - \lambda(r - R - X) \quad (2.57)$$

che porta all'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \left[p_r^2 - P^2 + \frac{p_\theta^2}{(r - X)^2} + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta (r - X)^2} \right] + \lambda(r - R - X) + up_\lambda \quad (2.58)$$

o, eliminando λ dalle variabili dinamiche

$$H = \frac{1}{2} \left[p_r^2 - P^2 + \frac{p_\theta^2}{(r - X)^2} + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta (r - X)^2} \right] + \lambda(r - R - X) \quad (2.59)$$

In quest'ultimo caso il vincolo primario è ovviamente

$$r - X - R \approx 0 \quad (2.60)$$

e l'unico secondario

$$p_r + P \approx 0 \quad (2.61)$$

Questi due vincoli hanno ovviamente mutue parentesi di Poisson nulle in tutto lo spazio delle fasi. Il rotore è stato convertito in una teoria di gauge abeliana. Le simmetrie della Lagrangiana (2.57) sono chiaramente quelle che fanno variare r e X della stessa funzione del tempo, mantenendo

$$r - X = \text{costante} \Rightarrow \dot{r} = \dot{X} \quad (2.62)$$

A livello hamiltoniano le trasformazioni di gauge sono date ancora una volta da una scelta particolare per la dinamica dei moltiplicatori di Lagrange, che nel caso della trattazione semplificata sono rappresentati dal solo λ . Si ha

$$\frac{d}{dt}(p_r - P) = \{p_r - P, H\} = \{p_r - P, \lambda(r - X - R)\} = -2\lambda \quad (2.63)$$

Scegliendo opportunamente una dinamica per la combinazione $p_r - P$ e tenendo conto che vale (2.61), ci si può sempre portare al caso $p_r \approx 0$, $P \approx 0$ equivalente al sistema prima della conversione.

Un'interpretazione in qualche modo fisica possibile per la conversione effettuata è la seguente (fermo restando che questa procedura è puramente formale e non richiede un'interpretazione fisica immediata in generale): sostituendo a r la combinazione lineare $r - X$ si è dotato il sistema di una sorta di invarianza di scala sul raggio, mentre il termine quadratico in \dot{X} serve a compensare l'energia cinetica radiale che deriva dai riscaldamenti nel tempo di r .

È possibile ora scrivere la carica BRST per questo sistema

$$\Omega = \alpha(r - X - R) + \beta(p_r + P) \quad (2.64)$$

ed estendere l'Hamiltoniana a una funzione BRST-osservabile:

$$H = \frac{1}{2} \left[p_r^2 - P^2 + \frac{p_\theta^2}{(r - X)^2} + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta (r - X)^2} \right] + \lambda(r - X - R) - \alpha b \quad (2.65)$$

Ora si ha

$$\{H, \Omega\} = \{H^{(0)}, \Omega\} - \{\alpha b, \Omega\} = -\alpha(p_r + P) + \alpha(p_r + P) = 0 \quad (2.66)$$

Scegliendo come fermione di gauge-fixing la funzione di ghost number -1 data da

$$K = \frac{b}{2}(p_r - P) + a\lambda \quad (2.67)$$

e effettuando il gauge fixing

$$\begin{aligned} H \rightarrow H + \{K, \Omega\} &= H - b\alpha - \frac{1}{2}(p_r - P)(p_r + P) - \lambda(r - X - R) = \\ &= H + \alpha b - \frac{1}{2}(p_r - P)(p_r + P) - \lambda(r - X - R) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{p_\theta^2}{(r - X)^2} + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta (r - X)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

si ottiene la funzione Hamiltoniana, coomologicamente equivalente a quella di partenza, che contiene solo la componente angolare della dinamica (come si voleva fin dall'inizio).

Riepilogando, attraverso la conversione dei vincoli si è trasformato un grado di libertà "proibito" in un grado di libertà "ridondante", per poi eliminarlo a livello coomologico. Il numero di gradi di libertà fisici è rimasto invariato e pari a 2 poiché si è passati da 3 variabili dinamiche e 2 vincoli di seconda classe a 4 variabili dinamiche e 2 vincoli di prima classe.

2.3.3 Elettrodinamica massiva classica

Prima di partire con l'analisi dell'elettrodinamica massiva come teoria singolare, vale la pena dedicare qualche riga alla discussione delle trasformazioni di gauge nel formalismo hamiltoniano dell'elettrodinamica massless, essendo indubbiamente la più nota teoria di gauge della fisica. I vincoli sono dati da

$$\Pi^0 \approx 0 \quad \partial_i \Pi^i \approx 0 \quad (2.69)$$

e rappresentano rispettivamente un vincolo primario e uno secondario. Nell'Hamiltoniana dell'elettromagnetismo massless appare un moltiplicatore libero u , che per motivi che appariranno chiari nel seguito conviene porre uguale a

$$u = \partial_0 \partial_0 v \quad (2.70)$$

dove v è un'altra funzione arbitraria dello spazio-tempo. Ovviamente porre (2.70) è sempre lecito e non restringe in alcun modo la forma che u può assumere. Eseguire una trasformazione di gauge significa a questo punto cambiare scelta della dinamica per la funzione v , e due dinamiche fisicamente equivalenti sono ottenute scegliendo due funzioni con dinamiche differenti $v_{(1)}$ e $v_{(2)}$. Per semplicità di notazione conviene definire a questo punto

$$\Lambda = v_{(1)} - v_{(2)} \quad (2.71)$$

Questa differenza nella dinamica dei moltiplicatori ha ovviamente conseguenze a livello delle altre variabili dinamiche: infatti

$$\partial_0 A_0 = \{A_0, H\} = u = \partial_0 \partial_0 v \quad (2.72)$$

da cui

$$\begin{aligned} \partial_0 A_{0(1)} - \partial_0 A_{0(2)} &= \partial_0 \partial_0 (v_{(1)} - v_{(2)}) \\ A_{0(1)} - A_{0(2)} &= \int dt [\partial_0 \partial_0 (v_{(1)} - v_{(2)})] = \partial_0 (v_{(1)} - v_{(2)}) = \partial_0 \Lambda \end{aligned} \quad (2.73)$$

e allo stesso modo

$$\begin{aligned} \partial_0 A_i(\mathbf{x}) &= \{A_i(\mathbf{x}), H\} = \int d^3 y \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} \frac{\delta H}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} - \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} \frac{\delta H}{\delta A_j(\mathbf{y})} = \\ &= \int d^3 y \delta_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi^j}(\mathbf{y}) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial_\mu \Pi^j}(\mathbf{y}) \right] = \\ &= \int d^3 y \delta_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[-\Pi_k(\mathbf{y}) \delta_j^k + \partial_\mu (A_0(\mathbf{y}) \delta_k^\mu \delta_j^k) \right] = -\Pi_i(\mathbf{x}) + \partial_i A_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.74)$$

che porta a

$$\begin{aligned} \partial_0 A_{i(1)} - \partial_0 A_{i(2)} &= \partial_i (A_{0(1)} - A_{0(2)}) = \partial_i \partial_0 \Lambda \\ A_{i(1)} - A_{i(2)} &= \int dt \partial_i \partial_0 \Lambda = \partial_i \Lambda \end{aligned} \quad (2.75)$$

Sono state ritrovate dunque le usuali simmetrie di gauge dell'azione

$$A_0 \rightarrow A_0 + \partial_0 \Lambda \quad A_i \rightarrow A_i + \partial_i \Lambda \quad (2.76)$$

Per una più generale funzione dello spazio delle fasi, le trasformazioni di gauge vanno computate direttamente attraverso l'espressione esplicita di (2.9). Per piccoli valori del parametro della trasformazione Λ , però, è sensato effettuare uno sviluppo in serie delle variabili canoniche

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial F}{\partial \Pi^\mu} \delta \Pi^\mu = \frac{\partial F}{\partial A_\mu} \partial_\mu \delta \Lambda \quad (2.77)$$

Queste trasformazioni, dette *trasformazioni di gauge infinitesime*, sono implementate attraverso le parentesi di Poisson e il *generatore di gauge*

$$\mathbf{g} = \partial_0 \delta \Lambda \Pi^0 - \delta \Lambda \partial_i \Pi^i \quad (2.78)$$

semplicemente come segue:

$$\delta F \approx \{F, \mathfrak{g}\} \quad (2.79)$$

Per completare l'analisi canonica dell'elettromagnetismo massless, occorre infine verificare che il numero di gradi di libertà fisici risulti quello corretto. Si consideri per esempio la scelta di gauge

$$A_0 \approx 0 \quad (2.80)$$

che chiaramente rende il vincolo Π^0 di seconda classe e impone $u \approx 0$. Tale condizione è nota come *gauge di Weyl*. Chiaramente, dato che $\Delta A_0 = \partial_0 \Lambda$, questa condizione determina univocamente $\partial_0 \Lambda(0)$, avendo indicato con $x^0 = 0$ l'istante in cui la trasformazione è terminata. Nessuna condizione viene però posta su $\partial_i \Lambda(0)$: gli $A_i(0)$ sono allora definiti a meno di un gradiente spaziale. Va pertanto posta un'ulteriore condizione, che è di solito presa essere

$$A_3(0) = 0 \quad (2.81)$$

Anche stavolta, attraverso le equazione del moto, quest'ultima condizione restringe la porzione dello spazio delle fasi su cui si svolge la dinamica, portando il numero finale dei gradi di libertà fisici esattamente a 2.

La carica BRST per l'elettromagnetismo massless è ovviamente

$$\Omega = \alpha \Pi^0 + \beta \partial_i \Pi^i \quad (2.82)$$

e un'estensione BRST-invariante dell'Hamiltoniana (1.78) è

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - A_0 \partial_i \Pi^i + u \Pi^0 - \alpha b \quad (2.83)$$

Come si è visto alla fine del capitolo precedente, la teoria dell'elettromagnetismo massivo presenta invece vincoli di seconda classe proprio a causa dell'aggiunta del termine di massa nella Lagrangiana del campo. Per ciò che è stato detto finora, ciò basta per concludere che non si tratti di una teoria di gauge a differenza dell'elettromagnetismo usuale. In effetti, un calcolo banale mostra che le solite trasformazioni di gauge non lasciano invariato il termine di massa della nuova Lagrangiana. Analogamente al caso appena trattato del rotore 3D, il modo più naturale di trattare il problema è tramite la conversione dei vincoli, effettuata nel presente caso grazie all'aggiunta di un grado di libertà di pure gauge, il *campo di Stüeckelberg* ζ [17].

In particolare, la nuova Lagrangiana (*Lagrangiana di Stüeckelberg*) da considerare è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (mA^\mu - \partial^\mu \zeta)(mA_\mu - \partial_\mu \zeta) \quad (2.84)$$

che per $\zeta = 0$ torna ad essere la (1.81). A questo punto l'analisi canonica porta alla definizione dei momenti

$$\Pi^\mu = F^{\mu 0} \quad \Pi^\zeta = -(\partial^0 \zeta - mA^0) = mA^0 - \partial^0 \zeta \quad (2.85)$$

Ancora una volta l'unico vincolo primario è $\phi_1 = \Pi^0$. L'Hamiltoniana risulta essere on-shell pari a

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\approx \Pi^\mu \partial_0 A_\mu + \Pi_\zeta \partial_0 \zeta - \mathcal{L} \approx \Pi^i \partial_0 A_i + \Pi_\zeta \partial_0 \zeta - \mathcal{L} \approx \\ &\approx -\Pi^i \Pi_i + \partial_i (\Pi^i A_0) - \partial_i \Pi^i A_0 + (mA^0 - \partial^0 \zeta) \partial_0 \zeta + \\ &+ \frac{1}{4} (2\Pi_i \Pi^i + F_{ij} F^{ij}) + \frac{1}{2} (mA^i - \partial^i \zeta)(mA_i - \partial_i \zeta) + \frac{1}{2} \Pi^\zeta \Pi_\zeta = \\ &= -\frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - A_0 \partial_i \Pi^i + (mA^0 - \partial^0 \zeta)(\partial_0 \zeta - mA_0) + \\ &+ (mA^0 - \partial^0 \zeta) mA_0 + \frac{1}{2} \Pi^\zeta \Pi_\zeta + \frac{1}{2} (mA^i - \partial^i \zeta)(mA_i - \partial_i \zeta) + \partial_i (\Pi^i A_0) \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - \frac{1}{2} \Pi^\zeta \Pi_\zeta + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} (mA^i - \partial^i \zeta)(mA_i - \partial_i \zeta) + \\ &+ A_0 (m\Pi^\zeta - \partial_i \Pi^i) + \partial_i (\Pi^i A_0) \end{aligned} \quad (2.86)$$

e off-shell a

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & -\frac{1}{2}\Pi^i\Pi_i - \frac{1}{2}\Pi^\zeta\Pi_\zeta + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}(mA^i - \partial^i\zeta)(mA_i - \partial_i\zeta) + \\ & + A_0(m\Pi^\zeta - \partial_i\Pi^i) + \partial_i(\Pi^i A_0) + u\Pi_0\end{aligned}\quad (2.87)$$

che è uguale a meno di una tridivergenza, e quindi equivalente, a

$$\mathcal{H} = \underbrace{-\frac{1}{2}\Pi^i\Pi_i - \frac{1}{2}\Pi^\zeta\Pi_\zeta}_{\mathcal{H}_1} + \underbrace{\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}}_{\mathcal{H}_2} + \underbrace{\frac{1}{2}(mA^i - \partial^i\zeta)(mA_i - \partial_i\zeta)}_{\mathcal{H}_3} + \underbrace{A_0(m\Pi^\zeta - \partial_i\Pi^i)}_{\mathcal{H}_4} + u\Pi_0 \quad (2.88)$$

L'algoritmo di consistenza fornisce il vincolo secondario

$$\phi_2 = \{\phi_1, H\} = \partial_i\Pi^i - m\Pi^\zeta \quad (2.89)$$

che commuta banalmente con ϕ_1 . Occorre ora imporre la conservazione del nuovo vincolo trovato

$$\{\phi_2, H\} \approx 0 \quad (2.90)$$

Questo vincolo commuta in modo triviale con \mathcal{H}_1 poiché vi compaiono solo momenti, con \mathcal{H}_2 come già visto in (1.80), con \mathcal{H}_4 poiché vi compaiono solo il vincolo stesso e il campo A_0 , e con ϕ_1 come già anticipato. Rimane solo da calcolare

$$\begin{aligned}\{\phi_2(\mathbf{x}), \int d^3y \mathcal{H}_3\} &= - \int d^3y \left[\frac{\delta\partial_i\Pi^i(\mathbf{x})}{\delta\Pi^j(\mathbf{y})} \left(\frac{\partial\mathcal{H}_3}{\partial A_j}(\mathbf{y}) - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{H}_3}{\partial\partial_\mu A_j}(\mathbf{y}) \right) - \right. \\ &\quad \left. - m \frac{\delta\Pi^\zeta(\mathbf{x})}{\delta\Pi^\zeta(\mathbf{y})} \left(\frac{\partial\mathcal{H}_3}{\partial\zeta}(\mathbf{y}) - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{H}_3}{\partial\partial_\mu\zeta}(\mathbf{y}) \right) \right] = \\ &= -m \int d^3y \left[\delta_j^i \partial_i^{(\mathbf{x})} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (mA^j(\mathbf{y}) - \partial^j\zeta(\mathbf{y})) - \right. \\ &\quad \left. - \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_j^\mu \partial_\mu (mA^j(\mathbf{y}) - \partial^j\zeta(\mathbf{y})) \right] = \\ &= -m \int d^3y \left[-\partial_j^{(\mathbf{y})} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (mA^j(\mathbf{y}) - \partial^j\zeta(\mathbf{y})) - \right. \\ &\quad \left. - \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_j (mA^j(\mathbf{y}) - \partial^j\zeta(\mathbf{y})) \right] = \\ &= -m \int d^3y \left[\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_j (mA^j(\mathbf{y}) - \partial^j\zeta(\mathbf{y})) - \right. \\ &\quad \left. - \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_j (mA^j(\mathbf{y}) - \partial^j\zeta(\mathbf{y})) \right] = 0\end{aligned}\quad (2.91)$$

Non appaiono dunque altri vincoli. Gli unici due già trovati commutano tra loro e sono dunque di prima classe. Come atteso, non è apparsa alcuna condizione sui moltiplicatori di Lagrange (ovvero su u , che è completamente libero). La teoria è nuovamente una teoria di gauge (abeliana). Inoltre l'aver aggiunto il campo di Stüeckelberg non ha cambiato i gradi di libertà della teoria, proprio come nel caso del rotore. Infatti si è passati dall'avere 4 campi e 2 vincoli di seconda classe a 5 campi e 2 vincoli di prima classe: in entrambi i casi si hanno 3 gradi di libertà fisici, uno in più rispetto all'elettromagnetismo massless. La procedura di conversione dei vincoli mostrata qui è nota come *meccanismo di Stüeckelberg* e storicamente rappresenta il primo tentativo di inserire una massa in una teoria di campo senza rompere l'invarianza di gauge.

Le trasformazioni di gauge della Lagrangiana di Stüeckelberg si trovano in modo analogo a quelle della Lagrangiana dell'elettromagnetismo massless e risultano essere

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda \quad \zeta \rightarrow \zeta + m\Lambda \quad (2.92)$$

Esse possono essere facilmente verificate semplicemente provando a inserirle all'interno della Lagrangiana.

Rimane ora solo da costruire la carica BRST per l'elettrodinamica massiva. Per preservare la natura locale della teoria essa dovrà poter essere scritta come

$$\Omega = \int d^3x \omega(x) \quad (2.93)$$

dove ω è una funzione regolare dello spazio-tempo che per analogia con i sistemi finito-dimensionali trattati finora verrà scritta come

$$\omega = \alpha \Pi^0 + \beta(\partial_i \Pi^i - m \Pi^\zeta) \quad (2.94)$$

Un'estensione BRST-invariante della densità di Hamiltoniana è

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - \frac{1}{2} \Pi^\zeta \Pi_\zeta + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} (mA^i - \partial^i \zeta)(mA_i - \partial_i \zeta) + \\ & + A_0(m \Pi^\zeta - \partial_i \Pi^i) + u \Pi_0 - \alpha b \end{aligned} \quad (2.95)$$

o, equivalentemente

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - \frac{1}{2} \Pi^\zeta \Pi_\zeta + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} (mA^i - \partial^i \zeta)(mA_i - \partial_i \zeta) \quad (2.96)$$

Evidentemente, per passare da (2.95) a (2.96) è stato utilizzato il fermione di gauge-fixing

$$K = au - bA_0 \quad (2.97)$$

Capitolo 3

Quantizzazione di sistemi singolari

3.1 Idee generali

3.1.1 Quantizzazione canonica

In ultima analisi, qualsiasi fenomeno naturale deve ammettere una spiegazione di natura quantistica. Ciò che è usualmente possibile ottenere in prima battuta è però una descrizione puramente classica, che si riassume nella conoscenza di un'Hamiltoniana. Il passaggio successivo da effettuare è detto *quantizzazione* e mira a ottenere una descrizione quantistica del fenomeno, in modo che nel limite classico (a scale macroscopiche, $\hbar \rightarrow 0$) ciò che si ritrovi sia proprio il sistema classico iniziale.

Se la dinamica quantistica del sistema considerato deve in qualche modo ricalcare (con differenze dell'ordine di \hbar) quella classica, un punto di partenza ovvio per la quantizzazione sono le parentesi di Poisson. Demandando ai testi specifici (non sorprendentemente numerosissimi) le motivazioni, si introduce a questo punto un *commutatore* tale che

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (3.1a)$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\{A, B\} \quad (3.1b)$$

Quelle che prima erano coordinate o funzioni nello spazio delle fasi per le quali era definita la struttura симпlettica delle parentesi di Poisson, sono ora operatori lineari appartenenti a un'algebra dotata di un commutatore (che possiede le proprietà di una derivazione ereditate dalle parentesi classiche). Gli oggetti su cui questi operatori agiscono sono detti *stati* e appartengono a uno *spazio di Hilbert*. La definizione di un tale spazio e dell'azione che gli operatori summenzionati hanno su di esso in modo da soddisfare (3.1b) è detta *rappresentazione*. A questo punto anche l'Hamiltoniana H del sistema viene promossa da funzione dello spazio delle fasi a un operatore lineare \hat{H} .

In generale, il sistema classico in esame può contenere sia gradi di libertà bosonici che fermionici, in ogni caso da promuovere a operatori lineari. In tal caso in (3.1b) bisogna inserire le parentesi di Poisson generalizzate, che portano alla definizione di un *commutatore generalizzato* (detto *anticommutatore* in presenza di soli gradi di libertà fermionici) dato da

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - (-1)^{\epsilon_A \epsilon_B} \hat{B}\hat{A} \quad (3.2)$$

La dinamica ora riguarda gli stati, per i quali è tradizionalmente riservata la lettera greca ψ , ed è stabilita dall'*equazione di Schrödinger*

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (3.3)$$

la cui soluzione per uno stato qualunque è enormemente semplificata una volta note le soluzioni dell'equazione agli autovalori detta *equazione di Schrödinger indipendente dal tempo*

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (3.4)$$

Lo studio di un sistema quantistico consiste di fatto nella determinazione dell'espressione esplicita di \hat{H} e delle soluzioni di (3.4), dette *autostati* di H . Se il sistema è anche conservativo (come tutti quelli trattati in questa tesi) è poi possibile costruire in maniera semplice un *operatore di evoluzione temporale*

$$U(t) = e^{-iHt} \quad (3.5)$$

tale che

$$\psi(t) = U(t)\psi(0) \quad (3.6)$$

e la cui azione esplicita su uno stato qualsiasi è facilmente computabile una volta noti gli autostati di H . Infine, si definisce sullo spazio di Hilbert un prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle$ tale che

$$\langle \psi | \chi \rangle \in \mathbb{C} \quad \langle \psi | \psi \rangle = \|\psi\|^2 \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \psi, \chi \quad (3.7)$$

Grazie a questo prodotto scalare è possibile definire in maniera implicita l'*aggiunto* A^\dagger di un operatore A come

$$\langle \psi | A\chi \rangle = \langle A^\dagger \psi | \chi \rangle \quad \forall \psi, \chi \quad (3.8)$$

Tutti gli operatori, compresi i vincoli, che verranno considerati saranno *hermitiani* (o *autoaggiunti*) rispetto a questo prodotto scalare, ovvero

$$A^\dagger = A \quad (3.9)$$

La procedura descritta finora passa sotto il nome di *quantizzazione canonica* e storicamente rappresenta il primo approccio allo studio della meccanica quantistica. La sua importanza attuale è comunque tutt'altro che puramente didattica. È doveroso precisare però che la sua possibilità di applicazione, almeno nei termini in cui è stata presentata qui, è ristretta all'ambito dei sistemi quantomeccanici finito-dimensionali. Passando alle ben più complesse *teorie di campo quantistiche*, delle quali l'elettrodinamica massless e massiva costituiscono due celebri esempi, la procedura va modificata profondamente, rendendo il problema della quantizzazione canonica molto più difficile, tanto sul piano concettuale quanto su quello tecnico. Per questa ragione nel presente capitolo verranno considerati solo semplici sistemi con un numero finito di gradi di libertà, lasciando da parte l'elettrodinamica massiva quantistica. Per maggiori dettagli sull'argomento si può consultare ad esempio [17].

Si noti infine che, in assenza di ambiguità, verranno omessi in seguito tutti i simboli "^^" (*cappuccio* o *cappello*) usati finora per contraddistinguere gli operatori.

3.1.2 Quantizzazione di Dirac di sistemi singolari

Il problema fondamentale nel quantizzare una teoria singolare è ovviamente la presenza dei vincoli nello spazio delle fasi. A livello classico, il ruolo di questi vincoli è trasparente: essi riducono la dimensione dello spazio fisico all'interno dello spazio delle fasi, riducendo la dinamica significativa ai moti che si svolgono sulla sottovarietà definita dai vincoli stessi.

A livello quantistico, invece, si hanno diverse possibilità nell'applicazione di questa restrizione: ad esempio, essa può essere implementata a livello degli operatori, scegliendo una particolare rappresentazione nella quale i vincoli siano identicamente soddisfatti, ovvero nella quale i vincoli diventino operatori identicamente nulli

$$\hat{\phi}_m = 0 \quad (3.10)$$

Altrimenti, la restrizione può essere realizzata a livello degli stati, definendo il sottospazio di Hilbert degli stati fisici attraverso

$$\hat{\phi}_m \psi = 0 \quad (3.11)$$

che è chiaramente una condizione lineare.

La seconda possibilità, ovvero la restrizione a un sottospazio di Hilbert detto *sottospazio fisico* è detta *quantizzazione di Dirac (per sistemi singolari)*. In presenza di soli vincoli di prima classe commutanti off-shell, questa scelta risulta tecnicamente molto semplice poiché la rappresentazione scelta non deve soddisfare ulteriori condizioni algebriche date dai vincoli. Inoltre, dato che in questo caso due vincoli qualsiasi ϕ_m e $\phi_{m'}$ hanno commutatore nullo, è consistente porre (3.11) ed è anche

possibile trovare una base ortonormale per il sottospazio definito da tale condizione. Infine, la scelta di applicare i vincoli direttamente a livello operatoriale sarebbe in qualche modo innaturale per un sistema con vincoli di prima classe, i quali come si è ampiamente discusso in precedenza hanno un ruolo ben preciso nella dinamica a livello classico e ci si aspetta che non possano essere posti identicamente a zero.

Non sempre la procedura descritta in questa sezione è però direttamente applicabile e nelle prossime sezioni ne saranno investigate le possibili alternative.

3.1.3 Quantizzazione con le parentesi di Dirac

Si consideri ora un sistema con vincoli di seconda classe. La mancanza di commutazione fra i vincoli rende impossibile porre in modo consistente la condizione (3.11) poiché essi non sono simultaneamente diagonalizzabili. L'unica via percorribile sembra allora essere quella di applicare a livello operatoriale i vincoli, facendo in modo che essi vengano promossi quantisticamente all'operatore nullo. Nel caso di vincoli di seconda classe quest'operazione non ha conseguenze drammatiche poiché questi vincoli non giocano alcun ruolo a livello dinamico nel sistema classico e quindi ci si aspetta che ciò non accada nemmeno nella sua controparte quantistica.

Chiaramente, una tale scelta di operatori non può essere una rappresentazione dell'algebra definita da (3.1b) poiché l'operatore nullo avrà necessariamente commutatore nullo con qualsiasi altro operatore, mentre i vincoli di seconda classe hanno parentesi di Poisson in generale non nulle con altre funzioni nello spazio delle fasi. Alla luce di quanto visto finora è evidente una soluzione a questo problema: cercare una rappresentazione dell'algebra definita dalle parentesi di Dirac

$$[\hat{A}, \hat{B}]^* = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (3.12a)$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]^* = i\{A, B\}^* \quad (3.12b)$$

per le quali i vincoli di seconda classe agiscono al pari della funzione nulla sullo spazio delle fasi, commutando trivialmente con qualsiasi altro oggetto. Dovendo commutare anche a livello quantistico con tutti gli altri possibili operatori, è possibile dimostrare che qualsiasi sia la rappresentazione scelta per (3.12b), i vincoli di seconda classe devono essere nella forma

$$\hat{\phi}_m = c\mathbb{I} \quad c \in \mathbb{C} \quad (3.13)$$

dove \mathbb{I} è l'operatore identità.

Dovendo porre (in qualche senso) a zero tali operatori, l'unica possibilità è scegliere $c = 0$ e realizzare i $\hat{\phi}_m$ in questione come gli operatori nulli su tutto lo spazio di Hilbert considerato.

3.1.4 Quantizzazione BRST

Un'ulteriore alternativa è proprio la costruzione BRST, vista finora solamente a livello classico. Tale formalismo si inserisce in modo naturale all'interno delle tecniche che costituiscono la quantizzazione canonica, portando a risultati consistenti.

Una volta costruita la simmetria BRST a livello classico, il passaggio alla quantizzazione è immediato: vengono quantizzati tutti i gradi di libertà (bosonici o fermionici), coerentemente con l'algebra definita dal commutatore generalizzato di cui si è già parlato. La carica BRST diventa, come le altre funzioni dello spazio delle fasi, un operatore lineare e hermitiano agente su uno spazio di Hilbert:

$$\Omega \rightarrow \hat{\Omega} \quad (3.14)$$

Quella che prima era una coomologia definita sulle funzioni dello spazio delle fasi, diventa ora una coomologia definita sugli operatori lineari associati a tali funzioni: un operatore A è detto BRST-chiuso se commuta con Ω , ovvero

$$[A, \Omega] = 0 \quad (3.15)$$

mentre è detto BRST-esatto se esiste un altro operatore B tale che

$$A = [B, \Omega] \quad (3.16)$$

Il vantaggio ora è che al posto di un set di vincoli da imporre si ha un unico operatore, il quale commuta anche con l'Hamiltoniana (dato che è sempre possibile trovarne un'estensione BRST-invariante). L'equivalenza fra (3.11) e

$$\Omega\psi = 0 \quad (3.17)$$

deriva direttamente dall'equivalenza a livello classico fra la simmetria BRST e le comuni simmetrie di gauge.

Ora anche a livello degli stati ψ rimane definita una coomologia: gli stati BRST-chiusi sono quelli che soddisfano (3.17), mentre quelli BRST-esatti sono quelli che possono essere scritti come

$$\psi = \Omega\chi \quad (3.18)$$

per un certo altro stato χ . Rimane definito in modo naturale anche un ghost number per gli stati:

$$\psi = \sum_g \psi_{(g)} \quad gh(\psi_{(g)}) = g \quad (3.19)$$

Analogamente a quanto fatto a livello operatoriale, gli stati fisici saranno dati dalla componente $\psi_{(0)}$ degli stati ψ BRST-chiusi ma non BRST-esatti.

Vale ora la pena verificare brevemente la consistenza di alcuni aspetti della teoria sviluppata finora. Innanzitutto si può notare come gli operatori BRST-chiusi *preservino la coomologia*, ovvero mappino stati esatti in stati esatti e stati chiusi in stati chiusi. Infatti se A è uno operatore (che sarà preso bosonico per semplicità) BRST-chiuso e ψ è uno stato esatto allora

$$A\psi = A\Omega\chi = \Omega A\chi \quad (3.20)$$

Invece, se ψ è uno stato chiuso allora anche la sua immagine lo è:

$$\Omega A\psi = A\Omega\psi = 0 \quad (3.21)$$

Inoltre è sensato considerare nulli gli operatori BRST-esatti, poiché quando agiscono sullo spazio fisico degli stati chiusi producono solo stati esatti, e quindi coomologicamente banali:

$$A\psi = [B, \Omega]\psi = B\Omega\psi - \Omega B\psi = \Omega B\psi \quad (3.22)$$

Anche a livello di prodotto scalare la costruzione BRST quantistica è consistente. È infatti sensato considerare nulli gli stati BRST-esatti, in quanto essi hanno norma nulla e prodotto scalare nullo con qualsiasi altro stato fisico

$$||\Omega\psi||^2 = \langle \Omega\psi | \Omega\psi \rangle = \langle \psi | \Omega^2\psi \rangle = \langle \psi | 0 \rangle = 0 \quad \langle \Omega\psi | \chi \rangle = \langle \psi | \Omega\chi \rangle = \langle \psi | 0 \rangle = 0 \quad (3.23)$$

Infine, sul piano della dinamica, il fatto che l'operatore H sia BRST-chiuso assicura che anche $U(t)$ lo sia e quindi che gli stati fisici evolvano solo in stati fisici. La scelta di un fermione di gauge-fixing, poi, non cambia a livello coomologico l'evoluzione temporale degli stati fisici: infatti

$$\begin{aligned} U_K(t)\psi &= e^{-i(H+[K,\Omega])t}\psi = e^{-iHt}e^{-i[K,\Omega]t}\psi = \\ &= e^{-iHt}(1 + \text{operatori BRST-esatti})\psi = \\ &= e^{-iHt}(\psi + \text{stati BRST-esatti}) = \\ &= e^{-iHt}\psi + \text{stati BRST-esatti} \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2 Applicazioni

3.2.1 La particella libera

L'esempio più semplice di quantizzazione di una teoria di gauge è costituito dalla particella libera relativistica. Non sorprendentemente questo semplice sistema è stato preso in considerazione da una moltitudine di testi di livello anche molto diverso tra loro, come [7],[12] o [16]. Verrà prima trattato il sistema in cui e non è compreso fra le variabili dinamiche.

L'algebra dei commutatori è data da

$$[x^\mu, p_\nu] = i\delta_\nu^\mu \quad [\alpha, a] = -i \quad (3.25)$$

Tutti gli altri commutatori sono nulli. Lo spazio più naturale per gli stati è quello delle funzioni L_2 delle variabili x^μ e α :

$$\psi(x^\mu, \alpha) = \psi_{(0)}(x^\mu) + \alpha\psi_{(1)}(x^\mu) \quad (3.26)$$

Una base di autostati per H è data da

$$|k, 0\rangle = e^{ik \cdot x} \quad |k, \alpha\rangle = \alpha e^{ik \cdot x} \quad (3.27)$$

mentre una rappresentazione dell'algebra (3.25) è

$$\hat{x}^\mu \psi = x^\mu \psi \quad \hat{p}_\mu \psi = -i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi \quad \hat{\alpha} \psi = \alpha \psi \quad \hat{a} \psi = -i \frac{\partial}{\partial \alpha} \psi \quad (3.28)$$

L'azione di questi operatori sugli autostati di H diventa allora

$$\begin{aligned} p_\mu |k, 0\rangle &= k_\mu |k, 0\rangle & p_\mu |k, \alpha\rangle &= k_\mu |k, \alpha\rangle \\ \alpha |k, 0\rangle &= |k, \alpha\rangle & \alpha |k, \alpha\rangle &= 0 \\ a |k, 0\rangle &= 0 & a |k, \alpha\rangle &= -i |k, 0\rangle \end{aligned} \quad (3.29)$$

Inoltre chiaramente

$$gh(|k, 0\rangle) = 0 \quad gh(|k, \alpha\rangle) = 1 \quad (3.30)$$

Rimane ora solo da estrarre la coomologia dello spazio appena costruito. In questo caso il compito è particolarmente facile: infatti imponendo

$$\begin{aligned} \Omega \psi &= 0 \\ \alpha(p^2 + 1)(\psi_{(0)} + \alpha\psi_{(1)}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

si ottiene

$$(p^2 + 1)\psi_{(0)} = 0 \quad (3.32)$$

mentre non si ottiene alcuna condizione su $\psi_{(1)}$. Gli stati BRST-chiusi sono allora

$$|k, 0\rangle \text{ con } k^2 + 1 = 0 \quad |k, \alpha\rangle \quad \forall k \quad (3.33)$$

Ora, chiaramente gli stati di ghost number nullo $\psi_{(0)}$ non possono essere esatti poiché $gh(\Omega) = 1$. Invece, per $k^2 + 1 \neq 0$, si ha

$$|k, \alpha\rangle = \frac{1}{k^2 + 1} \Omega |k, 0\rangle \quad (3.34)$$

In definitiva, la coomologia di Ω è formata dagli stati

$$|k, 0\rangle, |k, \alpha\rangle \quad \text{con } k^2 + 1 = 0 \quad (3.35)$$

La condizione su k è quella attesa (si veda l'equazione di Klein-Gordon), ma si sono ottenute due copie dello stesso sistema. Ci si riduce infine a una sola copia, quella degli stati fisici, imponendo che il ghost number sia nullo. Gli stati fisici, in definitiva, sono solo i $|k, 0\rangle$ che soddisfano $k^2 + 1 = 0$.

Si noti che inserire e e p_e fra le variabili dinamiche del sistema classico e quindi fra gli operatori di quello quantistico non avrebbe cambiato nulla per quanto riguarda il risultato: infatti gli stati dello spazio totale sarebbero stati rappresentati da funzioni del tipo $\psi(x^\mu, e, \alpha)$, ma il vincolo $p_e = 0$ (che a livello quantistico diventa $\frac{\partial \psi}{\partial e} = 0$) avrebbe comunque ristretto l'attenzione a quelli indipendenti da e .

3.2.2 Il rotore

Dato che quantisticamente è impossibile vincolare una particella a una superficie perfettamente bidimensionale senza violare il *Principio di Indeterminazione*, l'interesse del rotore quantistico è in qualche modo puramente accademico. In ogni caso, è un ottimo spunto per sviluppare alcune tecniche utilizzabili in altri contesti o per mostrare le debolezze di altre. A riprova del fatto che si tratti di un toy-model non privo di valore, basti considerare il grande numero di lavori che trattano dell'argomento, come [2], [10], [12] o [13].

Da un punto di vista tecnico, il rotore presenta vincoli di seconda classe che non possono essere imposti come condizioni sugli stati in modo diretto, come è stato appena fatto per la particella libera. È invece un semplice esempio in cui la sostituzione delle parentesi di Poisson con quelle di Dirac sembra offrire una valida scelta per la quantizzazione. In particolare, si dovrà cercare una rappresentazione per l'algebra

$$[x^i, x^j]^* = 0 \quad (3.36a)$$

$$[p_i, p_j]^* = \frac{1}{x^2} (p_i x_j - p_j x_i) \quad (3.36b)$$

$$[x^i, p_j]^* = \delta_j^i - \frac{x^i x_j}{x^2} \quad (3.36c)$$

In generale, trovare una tale rappresentazione può essere molto difficile e rappresenta uno degli svantaggi principali di questa procedura di quantizzazione. Vi è però uno svantaggio più fondamentale che verrà investigato meglio nel corso dello studio dell'esempio del rotore.

La semplice simmetria del modello in questione permette però di intuire immediatamente che le variabili significative in questo caso debbano essere quelle angolari, e ciò andrà tenuto in mente nella costruzione della suddetta rappresentazione. Innanzitutto, è sensato aspettarsi che lo spazio degli stati più naturale sia quello delle funzioni L_2 degli angoli θ e φ , dotato del prodotto scalare

$$\langle \psi | \chi \rangle = \int d(\cos \theta) d\varphi \overline{\psi(\theta, \varphi)} \chi(\theta, \varphi) = \int d\theta d\varphi \sin \theta \overline{\psi(\theta, \varphi)} \chi(\theta, \varphi) \quad (3.37)$$

Si noti che

$$(-i\partial_\theta)^\dagger = -i \left(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \quad (-i\partial_\varphi)^\dagger = -i\partial_\varphi \quad (3.38)$$

Dopodiché, si può tentare di definire gli operatori posizione direttamente a partire dalle coordinate sferiche sulla superficie di vincolo

$$\begin{aligned} \hat{x}^1 \psi(\theta, \varphi) &= R \sin \theta \cos \varphi \psi(\theta, \varphi) \\ \hat{x}^2 \psi(\theta, \varphi) &= R \sin \theta \sin \varphi \psi(\theta, \varphi) \\ \hat{x}^3 \psi(\theta, \varphi) &= R \cos \theta \psi(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Infine, è chiaro che gli operatori momento debbano a questo punto essere operatori differenziali agenti sugli angoli e legati in qualche modo agli usuali operatori momento angolare. Anche in questo caso partendo dai momenti classici espressi in coordinate sferiche

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial r}{\partial x^1} p_r + \frac{\partial \theta}{\partial x^1} p_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} p_\varphi = \sin \theta \cos \varphi p_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi p_\theta - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} p_\varphi \\ p_2 &= \frac{\partial r}{\partial x^2} p_r + \frac{\partial \theta}{\partial x^2} p_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} p_\varphi = \sin \theta \sin \varphi p_r + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi p_\theta + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} p_\varphi \\ p_3 &= \frac{\partial r}{\partial x^3} p_r + \frac{\partial \theta}{\partial x^3} p_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} p_\varphi = \cos \theta p_r - \frac{1}{r} \sin \theta p_\theta \end{aligned} \quad (3.40)$$

e avendo cura di eliminare i termini in p_r , di sostituire R a r e di ottenere infine degli operatori hermitiani, si arriva a definire

$$\begin{aligned}
 \hat{p}_1 &= \frac{1}{R} \left(\cos \theta \cos \varphi (-i\partial_\theta) + (-i\partial_\theta)^\dagger \cos \theta \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (-i\partial_\varphi) - (-i\partial_\varphi)^\dagger \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \right) = \\
 &= -\frac{i}{R} \left(\cos \theta \cos \varphi \partial_\theta - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi - \sin \theta \cos \varphi \right) \\
 \hat{p}_2 &= \frac{1}{R} \left(\cos \theta \sin \varphi (-i\partial_\theta) + (-i\partial_\theta)^\dagger \cos \theta \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (-i\partial_\varphi) + (-i\partial_\varphi)^\dagger \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \right) = \\
 &= -\frac{i}{R} \left(\cos \theta \sin \varphi \partial_\theta + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi - \sin \theta \sin \varphi \right) \\
 \hat{p}_3 &= -\frac{1}{R} \left(\sin \theta (-i\partial_\theta) + (-i\partial_\theta)^\dagger \sin \theta \right) = \\
 &= \frac{i}{R} (\sin \theta \partial_\theta + \cos \theta)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Verificare che questa scelta fornisca effettivamente una rappresentazione per l'algebra definita dalle parentesi di Dirac è ora solo una questione di pazienza.

Il passo successivo consiste nell'inserire gli operatori appena definiti nell'Hamiltoniana (1.54):

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \frac{1}{2} [(\hat{p}_1)^2 + (\hat{p}_2)^2 + (\hat{p}_3)^2] + \lambda (\sqrt{(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2} - R) = \\
 &= \frac{1}{2} [(\hat{p}_1)^2 + (\hat{p}_2)^2 + (\hat{p}_3)^2] = -\frac{1}{2R^2} \left[\partial_\theta^2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 - 1 \right] = \\
 &= \frac{\hat{L}^2}{2R^2} + \frac{1}{2R^2}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

È successo qualcosa di inaspettato. Oltre all'ovvio termine di momento angolare è apparsa una costante non nulla all'interno dell'Hamiltoniana. Gli autostati sono ancora dati dalle *armoniche sferiche* (gli autostati dell'operatore L^2), ma lo spettro energetico è riscalato di un termine non nullo rispetto alle attese. Dovrebbe essere naturale a questo punto chiedersi se tale termine debba effettivamente essere presente nell'Hamiltoniana di una particella quantistica vincolata a una superficie sferica di spessore nullo e se, in ogni caso, questo fatto sia di un qualche interesse fisico.

La risposta alla prima domanda è più semplice: il termine aggiuntivo deriva dalla particolare scelta della rappresentazione per l'algebra dei commutatori e non c'è alcuna garanzia che a scelte diverse non corrispondano costanti additive diverse (in generale infatti è così già per sistemi semplici come il cerchio S^1 : si veda [8]). È chiaro che un termine soggetto a una tale arbitrarietà non possa che rappresentare una patologia del modello e che, a prescindere dalla sua effettiva rilevanza fisica, debba essere eliminato in qualche modo. In effetti tali ambiguità sono caratteristiche di ogni tentativo di quantizzazione di un sistema meccanico in coordinate diverse da quelle cartesiane: ad oggi non esiste una prescrizione univoca per trattare tali problemi. In conclusione, la presenza di questa costante nell'Hamiltoniana è dovuta all'aver pensato la sfera come una superficie curva immersa in uno spazio fisico più grande da cui è stata rimossa una coordinata, mentre lo spazio fisico della particella è solamente la varietà vincolare. La memoria dello spazio tridimensionale in cui è immersa questa varietà si manifesta con questa patologia. Non si deve scordare che ciò che si sta quantizzando ora non è il sistema realistico di una particella confinata da un potenziale esterno in un guscio sferico sottile (sistema di grande interesse fisico e applicativo ma il cui studio devierebbe troppo dallo scopo della presente tesi, per approfondimenti si guardi ad esempio [14]), ma il sistema ideale di una particella il cui spazio delle configurazioni è nativamente la sfera S^2 . Nonostante quest'ultimo sistema abbia un interesse fisico meno diretto del primo, è stato preso in considerazione poiché tecnicamente presenta maggiori punti di contatto con le teorie di gauge, dal momento che in esse i gradi di libertà esterni alla superficie di vincolo sono inesistenti nella realtà e non possono nel modo più assoluto avere alcun effetto sulla fisica, sia pure esso solo il riscaldamento delle energie di una costante additiva.

La risposta alla seconda domanda è invece più sottile: dato che solitamente negli esperimenti a essere misurate sono solo le differenze fra livelli energetici, si potrebbe pensare che il problema discusso

finora non sussista a lato pratico. In realtà, la questione non può essere liquidata così facilmente per una ragione molto semplice: per una superficie più generale il termine aggiuntivo potrebbe non essere costante e distorcere quindi gli autostati e lo spettro energetico del sistema. In effetti, la presenza del parametro dimensionale R fa pensare che per una superficie di curvatura non costante esso possa dipendere fortemente dalla posizione. Per una teoria di gauge l'analogo di questo fatto invaliderebbe immediatamente il modello, in quanto la natura degli stati fisici non può risentire in nessun modo del fatto che nella descrizione del sistema è stato immerso lo spazio delle variabili fisiche in un più largo spazio che esiste solo a livello matematico. Quest'ultimo argomento dovrebbe far capire l'importanza di studiare un toy model qual è il rotore quantistico.

Fortunatamente, una soluzione alternativa è stata già trovata: convertendo i vincoli si ottiene una teoria di gauge completamete equivalente a quella originale, per la quale è possibile applicare il formalismo privo di ambiguità della quantizzazione BRST. Per mostrare la generalità della procedura in questione essa verrà applicata al caso più generale della particella vincolata alla sfera D -dimensionale S^D immersa in uno spazio cartesiano $D + 1$ -dimensionale descritto nella variabile radiale r e nelle variabili angolari chiamate collettivamente ω . Rispetto al caso della particella libera, però, compare una difficoltà ulteriore: infatti l'operatore p_r che compare sia nell'Hamiltoniana che nei vincoli non è hermitiano rispetto all'usuale prodotto scalare

$$\langle \psi | \chi \rangle = \int dr d\omega r^D \overline{\psi(r, \omega)} \chi(r, \omega) \quad (3.43)$$

Nel caso si arrivasse ad avere dei vincoli non hermitiani, anche Ω perderebbe questa proprietà e alla teoria costruita finora verrebbe a mancare una delle ipotesi fondamentali.

La soluzione a questo problema passa sempre attraverso la procedura di conversione dei vincoli; in particolare, definendo il prodotto scalare sullo spazio allargato contenente anche la variabile X come

$$\langle \psi | \chi \rangle = \int dr dX d\omega (r - X)^D \overline{\psi(r, X, \omega)} \chi(r, X, \omega) \quad (3.44)$$

si ottiene

$$p_r^\dagger = p_r - i \frac{D}{r - X} \quad P^\dagger = P + i \frac{D}{r - X} \quad (3.45)$$

e dunque

$$p_r^\dagger + P^\dagger = p_r + P \quad (3.46)$$

L'Hamiltoniana quantistica per la particella libera vincolata alla sfera è

$$H = \frac{1}{2} \left[p_r^\dagger p_r + \frac{L^2}{r^2} \right] + \lambda(r - R) \quad (3.47)$$

dove L^2 è l'operatore momento angolare in D dimensioni. Dato che in questo sistema non tutti gli operatori interessanti ammettono una realizzazione hermitiana, è necessario ripeterne l'analisi canonica anche a livello quantistico. In ogni caso le differenze dal caso già visto sono minime. L'Hamiltoniana modificata e BRST-invariante diventa semplicemente

$$H = \frac{1}{2} \left[p_r^\dagger p_r - P^\dagger P + \frac{L^2}{(r - X)^2} \right] + \lambda(r - X - R) - \alpha b \quad (3.48)$$

La carica BRST, ora hermitiana, è data da

$$\Omega = \alpha(r - X - R) + \beta(p_r + P) \quad (3.49)$$

Scegliendo il fermione di gauge-fixing

$$K = \frac{b}{2}(p_r^\dagger - P^\dagger) - ib \frac{D}{r - X} + a\lambda \quad (3.50)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
H + [K, \Omega] &= \frac{1}{2} \left[p_r^\dagger p_r - P^\dagger P + \frac{L^2}{(r-X)^2} \right] + \lambda(r-X-R) - \alpha b - \\
&\quad - b\alpha - \frac{1}{2}(p_r^\dagger - P^\dagger)(p_r + P) - \lambda(r-X-R) + i\frac{D}{r-X}(p_r + P) = \\
&= \frac{1}{2} \left[p_r^\dagger p_r - P^\dagger P + \frac{L^2}{(r-X)^2} \right] - \frac{1}{2}(p_r^\dagger p_r - P^\dagger P) + \\
&\quad + (p_r^\dagger P - P^\dagger p_r) + i\frac{D}{r-X}(p_r + P) = \\
&= \frac{L^2}{2(r-X)^2} + p_r^\dagger P - P^\dagger p_r + i\frac{D}{r-X}(p_r + P) = \\
&= \frac{L^2}{2(r-X)^2} + (p_r - i\frac{D}{r-X})P - (P + i\frac{D}{r-X})p_r + i\frac{D}{r-X}(p_r + P) = \\
&= \frac{L^2}{2(r-X)^2}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Gli stati fisici soddisfano

$$\Omega\psi = 0 \tag{3.52}$$

e dunque data l'indipendenza dei ghost le relative componente a ghost number nullo $\psi_{(0)}$ devono soddisfare simultaneamente

$$(r-X-R)\psi_{(0)} = 0 \quad (p_r + P)\psi_{(0)} = 0 \tag{3.53}$$

Dato che ogni stato può essere scritto come somma di stati fattorizzabili in parte radiale $R(r, X)$ e parte angolare $\chi(\omega)$, ha senso per semplicità considerare direttamente uno stato nella forma

$$\psi_{(0)}(r, \omega) = R(r, X)\chi(\omega) \tag{3.54}$$

Dato che i vincoli dipendono solo dalle variabili radiali, $\chi(\omega)$ è una qualsiasi funzione periodica degli angoli. $R(r, X)$ deve invece necessariamente avere la forma

$$R(r, X) \propto \delta(r-X-R) \tag{3.55}$$

e dunque

$$\psi_{(0)}(r, X, \omega) \propto \delta(r-X-R)\chi(\omega) \tag{3.56}$$

che è il risultato più logico, dato che rappresenta una funzione d'onda localizzata sulla superficie vincolare.

L'operatore hamiltoniano su tali stati diventa allora

$$H = \frac{L^2}{2R^2} \tag{3.57}$$

che è esattamente il risultato sperato. Gli autostati sono le armoniche sferiche in D variabili angolari e le energie

$$E_l = \frac{l(l+D-1)}{R^2} \tag{3.58}$$

non contengono alcuna costante non fisica ingiustificata.

Conclusioni

Per riepilogare, l'ambito più naturale per la classificazione dei vincoli e dunque delle teorie singolari si è rivelato essere quello hamiltoniano. La dinamica è stata mostrata dipendere profondamente dal tipo di vincoli presenti nel sistema. In particolare, è stato studiato a livello hamiltoniano il legame fra i vincoli e la generazione delle trasformazioni di gauge, più comunemente studiate nell'ambito del formalismo lagrangiano. La teoria generale dei sistemi singolari è stata applicata ad alcuni esempi significativi, sia in presenza di un numero finito di gradi di libertà che, invece, di campi.

Il formalismo sviluppato è stato poi preso come punto di partenza per ottenere una teoria della quantizzazione canonica dei sistemi singolari che fosse la più generale possibile. Il metodo studiato in maggiore dettaglio e applicato con successo in contesto quantomeccanico è stato quello della quantizzazione BRST unita alla procedura di conversione dei vincoli.

In particolare, un esempio rilevante dal punto di vista delle tecniche sviluppate nel corso della tesi si è dimostrato essere quello della particella vincolata, per il quale sono stati portati a termine due tentativi di quantizzazione indipendenti, poi confrontati sulla base di argomentazioni fisiche. La quantizzazione attraverso le parentesi di Dirac si è rivelata una procedura insoddisfacente anche per un sistema semplice come il rotore $3D$ per la comparsa, nei livelli energetici, di una costante additiva non attesa e dipendente dal raggio della sfera. Inoltre, nel caso del rotore su S^D computare le corrette parentesi di Dirac avrebbe reso il problema impraticabile. Al contrario, si è mostrato come trasformare un grado di libertà sottoposto a vincolo meccanico in un grado di libertà ridondante (poiché soggetto a invarianza di scala) non porti alla comparsa di termini di curvatura nei livelli energetici e permetta di trovare la dinamica attesa in partenza, evitando anche gran parte delle difficoltà computazionali. La quantizzazione BRST unita alla procedura di conversione dei vincoli ha quindi portato a un risultato consistente e fisicamente sensato.

Appendice A

Hamiltoniana estesa e Congettura di Dirac

Come si è visto, le simmetrie di gauge agiscono a livello hamiltoniano come il flusso dei vincoli di prima classe primari moltiplicati per funzioni arbitrarie dette moltiplicatori di Lagrange. Il ruolo privilegiato dei vincoli primari appare naturale prendendo il formalismo lagrangiano come punto di partenza: essi nascono dall'aver immerso artificiosamente lo spazio delle fasi fisico in uno più ampio e la loro presenza nell'Hamiltoniana totale è giustificata dal fatto che non sia possibile stabilire a priori l'espressione di tale funzione al di fuori della superficie di vincolo primario.

Nella comparsa dei vincoli primari le equazioni del moto non giocano alcun ruolo: essi sono in un certo senso puramente geometrici. I vincoli secondari sono invece imposti successivamente facendo ricorso alla dinamica del sistema e restringono ulteriormente la superficie di vincolo primaria. Si potrebbe a questo punto essere tentati di aggiungere all'Hamiltoniana anche i vincoli di prima classe secondari moltiplicati per opportuni moltiplicatori di Lagrange indipendenti. Dopotutto, si tratterebbe di aggiungere all'Hamiltoniana quantità nulle on-shell. In realtà, è stato già visto più volte come funzioni nulle on-shell possano avere parentesi non nulle sulla superficie di vincolo e modificare così la dinamica sullo spazio fisico. Inoltre, aggiungere tali termini nell'Hamiltoniana totale non è giustificato in alcun modo all'interno della teoria sviluppata fino a questo punto: la funzione Hamiltoniana è infatti indeterminata al di fuori della superficie di vincolo primaria (ed è quindi nota su tutto lo spazio delle fasi a meno di combinazioni dei vincoli primari) a causa della singolarità della trasformata di Legendre, ma è invece nota sopra tale superficie.

I vincoli secondari di prima classe svolgono comunque un ruolo nella dinamica delle trasformazioni di gauge. La ragione è che in questo formalismo tali trasformazioni avvengono nel tempo, e durante l'evoluzione temporale del sistema l'azione dei vincoli primari può modificare anche quella parte della dinamica in cui i moltiplicatori di Lagrange non appaiono esplicitamente. Si consideri ad esempio un sistema con un vincolo primario γ e uno secondario $\gamma^{(2)}$, entrambi di prima classe. L'assenza di vincoli di seconda classe comporta $H' = H_0$, in quanto non compaiono condizioni sui moltiplicatori. Allora

$$\{\{F, H'\}, \gamma\} = \{\{F, H_0\}, \gamma\} = -\{\{H_0, \gamma\}, F\} - \{\{\gamma, F\}, H_0\} = -\{F, \gamma^{(2)}\} - \{\{\gamma, F\}, H_0\} \quad (\text{A.1})$$

All'ultimo passaggio è comparsa una parentesi di Poisson contenente il vincolo secondario, che può dare in generale un contributo non nullo a (2.9).

Come esempio più specifico, si consideri il caso dell'elettromagnetismo massless, in cui sono presenti un vincolo primario e uno secondario, entrambi di prima classe. Le solite trasformazioni di gauge dell'azione sono ritrovate scegliendo arbitrariamente una dinamica per il moltiplicatore u del vincolo primario Π^0 , ma in esse entra anche il vincolo secondario $\partial_i \Pi^i$. È stato in effetti mostrato esplicitamente come una trasformazione di gauge infinitesima agisca attraverso il generatore di gauge (2.78). In esso compare un solo parametro arbitrario Λ e non uno per ogni vincolo di prima classe.

Si supponga di voler comunque ricorrere a una funzione più generale dell'Hamiltoniana totale. Questo approccio è stato sviluppato da Dirac nel lavoro [4] che diede inizio allo studio della quantizzazione dei sistemi vincolati e porta alla definizione dell'*Hamiltoniana estesa*. Tale funzione è ottenuta

a partire dall'Hamiltoniana totale aggiungendo l'intero set dei vincoli di prima classe moltiplicati per parametri arbitrari e indipendenti fra loro:

$$H_E = H + \epsilon^\beta \gamma_\beta^{(2)} \quad (\text{A.2})$$

In quest'ultima equazione l'indice β scorre tutti i vincoli di prima classe secondari.

Ci vuole poco a verificare che facendo variare nel tempo tutti i parametri inseriti nell'Hamiltoniana in modo indipendente fra loro le equazioni di Hamilton così prodotte non sono più equivalenti a quelle di Eulero-Lagrange. Da un punto di vista dinamico il passaggio all'Hamiltoniana estesa è totalmente ingiustificato e porta a conclusioni sbagliate: una traiettoria fisica può venire mappata in una traiettoria proibita dalle equazioni del moto originali. Questo punto di vista non è però da scartare completamente: porta semplicemente a una differente definizione delle trasformazioni di gauge, dette *trasformazioni di gauge a tempo fissato*. In questo approccio le trasformazioni di gauge non avvengono nel tempo come parte della dinamica, ma vengono eseguite a tempo fissato come trasformazioni canoniche generate dai vincoli di prima classe moltiplicati per parametri arbitrari. La cosa interessante è che così facendo in effetti gli stati fisici (punti della superficie di vincolo) vengono mandati in stati fisici equivalenti. Questo risultato, noto come *Congettura di Dirac*, è stato dimostrato sotto ipotesi molto generali che escludono i pochi casi patologici che la violano [6].

Tornando al caso dell'elettromagnetismo massless, l'Hamiltoniana estesa si scrive come

$$\mathcal{H}_E = -\frac{1}{2}\Pi^i\Pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - A_0\partial_i\Pi^i + u_1\Pi^0 + u_2\partial_i\Pi^i \quad (\text{A.3})$$

che a meno di una ridefinizione di u_2 diventa

$$\mathcal{H}_E = -\frac{1}{2}\Pi^i\Pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + u_1\Pi^0 + u_2\partial_i\Pi^i \quad (\text{A.4})$$

Le trasformazioni di gauge generate da questa Hamiltoniana non sono ovviamente quelle corrette. Infatti esse agiscono sulle variabili dinamiche come

$$A_0 \rightarrow A_0 + \partial_0\Lambda_1 \quad A_i \rightarrow A_i + \partial_i\Lambda_2 \quad (\text{A.5})$$

con Λ_1 e Λ_2 indipendenti. A tempo fissato, però, non vi è alcuna differenza rispetto a quelle usuali. Infatti, scegliendo liberamente per un certo istante fissato t_0 una funzione $\Lambda(\mathbf{x}, t_0)$, è possibile fissarne indipendentemente il gradiente spaziale e la derivata temporale punto per punto. Al tempo t_0 , dunque, tutti i punti dello spazio delle fasi che sono collegati tra loro da una trasformazione del tipo (A.5) lo sono anche da una del tipo (2.76). Se si vuole invece eseguire una trasformazione su tutto un intervallo temporale, i due tipi di trasformazione differiscono pesantemente in quanto ora gradiente spaziale e derivata temporale di Λ sono ovviamente collegati fra loro. In definitiva, le trasformazioni generate dall'Hamiltoniana estesa mappano sì stati fisici in stati fisici equivalenti, ma anche attraverso traiettorie fisicamente proibite e non possono essere inserite in modo indolore nella dinamica del sistema. Lavori che trattano dell'argomento sono ad esempio [15] o [22].

Come si inserisca il formalismo BRST in questo contesto non è una questione ovvia. A prima vista, dato che nella carica BRST Ω ogni vincolo di prima classe appare moltiplicato per un ghost indipendente, sembrerebbe che l'approccio di Dirac sia quello più naturale. In realtà, non bisogna dimenticare che i ghost non sono moltiplicatori di Lagrange ma gradi di libertà veri e propri e inoltre che la dinamica nello spazio delle fasi esteso è governata dall'estensione BRST-invariante dell'Hamiltoniana totale. Tornando al caso dell'elettromagnetismo si vede ad esempio che

$$\dot{\beta} = \{\beta, H\} = -\{\beta, \alpha b\} = \alpha\{\beta, b\} = -\alpha \quad (\text{A.6})$$

Inserendo la legge del moto dei ghost nella carica BRST si trova

$$\Omega = -\dot{\beta}\Pi^0 + \beta\partial_i\Pi^i \quad (\text{A.7})$$

che a meno di scambiare $-\beta$ con Λ ha un'espressione identica al generatore di gauge, nel quale i moltiplicatori di Lagrange non sono tutti indipendenti ma legati da derivazioni temporali gli uni agli altri. La costruzione BRST prende quindi automaticamente in considerazione le relazioni che devono intercorrere tra i parametri che moltiplicano i vincoli primari e secondari in modo da rispettare le equazioni del moto.

Appendice B

Teoremi di Nöther per sistemi di gauge

Il *Primo Teorema di Nöther* rappresenta senza dubbio il più famoso risultato riguardante i sistemi dotati di simmetrie globali dell'azione. Le sue conseguenze sono di enorme importanza fisica, come il fatto che in un sistema invariante per trasformazioni di Lorentz il quadrimomento sia conservato.

Meno noto è il *Secondo Teorema di Nöther*, che coinvolge i sistemi in cui le simmetrie dell'azione sono locali, ovvero le teorie di gauge. Un testo che li riporta entrambi è il [19]. Questo secondo risultato può essere sintetizzato come segue: se l'azione di una teoria scritta come funzionale dei campi Φ_r è invariante sotto un gruppo di simmetrie continuo parametrizzato da p funzioni arbitrarie regolari allora esistono esattamente p equazioni differenziali soddisfatte dalle derivate funzionali dell'azione (ovvero dalle equazioni di Eulero-Lagrange \mathcal{L}_r).

Queste equazioni sono trivialmente risolte lungo i moti (ovvero ponendo $\mathcal{L}_r = 0$). Esse però valgono anche quando non sono soddisfatte le equazioni del moto e forniscono delle condizioni che riducono il numero di equazioni del moto indipendenti. Ovviamente ciò comporta che le equazioni non siano sufficienti a determinare la dinamica di tutte le variabili della teoria, con le conseguenze già discusse nel corso della tesi. Il Secondo Teorema di Nöther fornisce quindi a livello lagrangiano quel legame fra simmetrie di gauge e arbitrarietà nella dinamica che finora è stato investigato solo nel formalismo hamiltoniano.

Dato che la dimostrazione del Primo Teorema di Nöther è riportata per esteso in un gran numero di testi (ad esempio [11]) essa verrà data per nota. A partire dai risultati ottenuti durante la suddetta dimostrazione è molto semplice ottenerne una anche per il secondo teorema. Si considerino innanzitutto simmetrie infinitesime che agiscono sui campi e sulle coordinate. Prima di iniziare è comodo definire per i campi la *variazione totale* come $\bar{\delta}\Phi_r(x) = \Phi'_r(x') - \Phi_r(x)$ e la *variazione in forma* come $\delta\Phi_r(x) = \Phi'_r(x) - \Phi_r(x)$, dove l'apice indica gli oggetti trasformati. Per le coordinate basta definire la *variazione* come $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu$. Un calcolo banale mostra che

$$\bar{\delta}\Phi_r = \delta\Phi_r + \partial_\mu \Phi_r \delta x^\mu \quad (\text{B.1})$$

Si prendano in considerazione trasformazioni di gauge infinitesime che agiscono attraverso le p funzioni ϵ^α e le loro derivate prime spazio-temporali. Esse possono essere scritte in generale come segue:

$$\delta x^\mu = \epsilon^\alpha(x) K_\alpha^\mu(x) \quad (\text{B.2a})$$

$$\bar{\delta}\Phi_r(x) = \epsilon^\alpha(x) P_{\alpha,r}(x) + \partial_\mu \epsilon^\alpha Q_{\alpha,r}^\mu(x) \quad (\text{B.2b})$$

A questo punto si consideri il seguente risultato intermedio ottenuto durante la dimostrazione del primo teorema

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\delta x^\mu \mathcal{L} + \delta\Phi_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_r} \right) + \delta\Phi_r \mathcal{L}_r \quad (\text{B.3})$$

dove è sottintesa una sommatoria su r . Tenendo conto che per simmetrie si ha per definizione $\delta\mathcal{L} = 0$, supponendo le solite condizioni di annullamento all'infinito dei campi e utilizzando il teorema della

divergenza si può scrivere

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^3x \delta\Phi_r(x) \mathcal{L}_r(x) = \int d^3x (\bar{\delta}\Phi_r(x) - \partial_\mu \Phi_r(x) \delta x^\mu) \mathcal{L}_r(x) = \\
&= \int d^3x (\epsilon^\alpha(x) P_{\alpha,r}(x) + \partial_\mu \epsilon^\alpha(x) Q_{\alpha,r}^\mu(x) - \partial_\mu \Phi_r(x) \epsilon^\alpha(x) K_\alpha^\mu(x)) \mathcal{L}_r(x) = \\
&= \int d^3x \epsilon^\alpha(x) [(P_{\alpha,r}(x) - \partial_\mu \Phi_r(x) K_\alpha^\mu(x)) \mathcal{L}_r(x) - \partial_\mu (Q_{\alpha,r}^\mu(x) \mathcal{L}_r(x))]
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Data la totale arbitrarietà delle funzioni $\epsilon^\alpha(x)$, ciò comporta che

$$(P_{\alpha,r}(x) - \partial_\mu \Phi_r(x) K_\alpha^\mu(x)) \mathcal{L}_r(x) - \partial_\mu (Q_{\alpha,r}^\mu(x) \mathcal{L}_r(x)) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, p \tag{B.5}$$

che sono proprio le p relazioni differenziali fra le equazioni di Eulero-Lagrange cercate.

Ad esempio, per l'elettromagnetismo si ha un solo parametro Λ e

$$K_\alpha^\mu = 0 \quad P_{\alpha,\nu} = 0 \quad Q_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu \tag{B.6}$$

Inserendo queste espressioni in (B.5) si trova la solita relazione

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} = 0 \tag{B.7}$$

Un'ultima considerazione può essere fatta in merito alla *carica conservata* dalle simmetrie di gauge: infatti è formalmente possibile ripetere il procedimento che porta alla costruzione di questa grandezza anche per questo genere di trasformazioni. Anche senza bisogno di effettuare calcoli, è già possibile prevedere quale sia la carica conservata da una trasformazione di gauge: infatti è noto che a livello hamiltoniano le simmetrie sono generate dalle rispettive cariche attraverso le parentesi di Poisson. È ovvio a questo punto che la carica di tali simmetrie sia proprio il vincolo che la genera. Questo spiega l'assenza a livello fisico di una effettiva quantità misurabile conservata (al pari del quadrimomento per le trasformazioni di Lorentz): tali quantità sono nulle on-shell, ovvero per tutti gli stati fisici. Essendo le simmetrie di gauge simmetrie non fisiche, questo risultato è rassicurante. Per completezza, può essere interessante verificare esplicitamente questo fatto in un caso semplice come l'elettromagnetismo massless libero. La corrente di Nöther è

$$\mathcal{J}^\mu = \delta A_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = \partial_\nu \Lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = \partial_\nu \Lambda F^{\nu\mu} \tag{B.8}$$

e dunque la carica risulta

$$\mathcal{Q} = \int d^3x \partial_\nu \Lambda F^{\nu 0} = \int d^3x \partial_i \Lambda F^{i0} = - \int d^3x \Lambda \partial_i F^{i0} = - \int d^3x \Lambda \partial_i \Pi^i \approx 0 \tag{B.9}$$

Bibliografia

- [1] Marco Abate e Francesca Tovena. *Geometria differenziale*. Pisa: Springer, 2011.
- [2] E. Abdallaa e Banerjeeb R. «Quantization of the multidimensional rotor». In: *Brazilian Journal of Physics* (1998).
- [3] Carlo Maria Becchi e Camillo Imbimbo. *Becchi-Rouet-Stora-Tyutin symmetry*. 2008. URL: http://www.scholarpedia.org/article/Becchi-Rouet-Stora-Tyutin_symmetry.
- [4] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. New York: Yeshiva University Press, 1964.
- [5] Francesco Fassò. *Istituzioni di Fisica Matematica*. Padova: Cleup, 2016.
- [6] Marc Henneaux e Claudio Teitelboim. *Quantization of gauge systems*. Princeton: Princeton University Press, 1991.
- [7] J.W. van Holten. *Aspects of BRST quantization*. Amsterdam: NIKHEF e Vrije Universiteit, 2001.
- [8] John R. Klauder e Sergei V. Shabanov. «Coordinate-free quantization of second-class constraints». In: *Nuclear Physics* (1997).
- [9] John R. Klauder e Sergei V. Shabanov. «Nöther's theorem for local gauge transformations». In: *American Journal of Physics* (1990).
- [10] Hagen Kleinert e Sergei V. Shabanov. «Proper Dirac quantization of a free particle on a D-dimensional sphere». In: *Physics letters A* (1997).
- [11] Kurt Lechner. *Elettrodinamica Classica*. Padova: Springer, 2013.
- [12] Dennis Nemeschansky, Christian Preitschopf e Marvin Weinstein. «A BRST Primer». In: *Annals of Physics* (1988).
- [13] C. Neves e C. Wotzasek. «Stückelberg field-shifting quantization of a free particle on a D-dimensional sphere». In: *Journal of Physics* (2000).
- [14] Carmine Ortix et al. «Curvature-induced geometric potential in strain-driven nanostructures». In: *Physical Review* (2011).
- [15] J. Brian Pitts. «A first class constraint generates not a gauge transformation, but a bad physical change: the case of electromagnetism». In: *Annals of Physics* (2014).
- [16] Joseph Polchinski. *String Theory volume I*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [17] Henri Ruegg e Martí Ruiz-Altaba. *The Stueckelberg Field*. Genève: Département de Physique Théorique, Université de Genève, 2003.
- [18] Sanjeev S. Seahra. *The Classical and Quantum Mechanics of Systems with Constraints*. Waterloo: University of Waterloo, 2002.
- [19] Kurt Sundermeyer. *Constrained Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 1982.
- [20] Claudio Teitelboim. *Quantum Mechanics of Fundamental Systems 1*. Santiago: Springer, 1988.
- [21] Andreas W. Wipf. *Hamilton's Formalism for Systems with Constraints*. Zürich: Institut für Theoretische Physik, 1993.
- [22] Gràcia X. e J.M. Pons. «Gauge generators, Dirac's Conjecture, and degrees of freedom for constrained systems». In: *Annals of Physics* (1988).